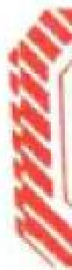
分析力学原理与方法

刘焕堂 编著

厦门大学出版社



ISBN 7-5615-0179-X

O·10 定价：3.85元

分析力学原理与方法

刘 焕 堂 编著

厦 门 大 学 出 版 社

前　言

以考虑力、速度和加速度为基本物理量并以牛顿定律为基础的牛顿力学，在处理力学问题的过程中，靠直观、选坐标系、进行受力分析、列出运动方程，进而解微分方程。可是，遇到约束力较多的系统时，解这些微分方程就变成是非常复杂和十分困难的事了。特别在十八、十九世纪，随着工业革命的迅速发展，在工程技术上迫切需要解决的也正好是这类问题。因此，迫切需要寻求另外的方法来处理这一类的问题。不少的科学家都致力于这一工作，从而建立起分析力学这一重要分支。

分析力学的杰出代表是拉格朗日(Lagrange 1736—1813)，他比较系统地研究了这一方法，并在1788年完成了一部巨著《分析力学》(Mécanique Analytique)。它完全用数学分析的方法来解决所有的力学问题(静力学、动力学、流体静力学和流体动力学)。他引进了广义坐标的概念，通过一个机械系统，推导出拉格朗日形式的动力学方程。这在理论和应用方面，对十九世纪力学的发展产生了很大的影响。以拉格朗日方程为基础的力学简称为拉格朗日力学。

分析力学的另一代表人物是哈密顿(Hamilton 1805—1865)。他在1834年，引入了广义动量的概念，建立起哈密顿形式的动力学方程——正则方程(Canonic equation)。同时，他又提出了可以作为力学基本原理的哈密顿原理。以哈密顿正则方程和哈密顿原理为基础的力学简称为哈密顿力学。

在以拉格朗日力学和哈密顿力学为核心的分析力学的创立与发展的过程中，曾经有过贡献的还有高斯(*Gauss*)、泊松(*Poisson*)、雅可俾(*Jacobi*)、阿佩尔(*Appell*)、莫培督(*Maupertuis*)等科学家。

分析力学与牛顿力学尽管有各自的特点，但它们均属于经典力学的范畴。它们的基本原理以及理论结果都相互联系着。

由于分析力学所注重的不是力和加速度，而是具有更广泛意义的能量。同时又采用了广义坐标、广义力、广义动量等，因而使分析力学的方法与结论所适用的范围可以超出力学的领域。因此，分析力学一直是工程技术、天体力学、理论物理工作者所感兴趣的。也正因为分析力学所涉及的理论内容和应用方面均很广，限于作者的水平和篇幅的关系，本书只结合多年的教学实践，着重介绍分析力学的一些基本原理和方法。

厦门大学物理系陈英昭付教授对本书原稿进行了详细的审阅，并提出了很多宝贵的意见，作者借此机会表示衷心的感谢。

由于水平有限，时间匆忙，书中难免有缺点与错误，欢迎读者批评指正。

刘焕堂

1987年12月于厦门大学物理系

分析力学原理与方法

刘焕堂 编著

●

厦门大学出版社出版发行
厦门大学印刷厂印刷

*

开本787×1092　1/16　18.875印张　450千字
1989年3月第1版　1989年3月第1次印刷
印数：1—1000册
ISBM　7—5615—0179—x/O·10

定价：3.85元

目　录

第一章　虚功原理与达朗伯原理

§1—1　约束、自由度和广义坐标

一、约束及其分类

质点组是指这样的一个质点的集合，其中每一个质点的运动都与组中其他质点的位置和运动有关。这样的质点组有时也称为力学组或系统。因此，凡是限制质点组中质点运动的条件均称为**约束**。如刚体绕定轴转动（限制其位置）、刚性球在粗糙平面上作无滑动的滚动（限制其运动的速度）。

用数学解析式子来表示约束的方程称为**约束方程**。若质点组是由N个质点所组成，那么约束方程可写为

$f_s(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \cdots, x_N, y_N, z_N; \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dot{x}_2, \dot{y}_2, \dot{z}_2, \cdots, \dot{x}_N, \dot{y}_N, \dot{z}_N; t)=0$ 或缩写为

$f_s(x_k, y_k, z_k; \dot{x}_k, \dot{y}_k, \dot{z}_k; t)=0 \quad (k=1, 2, 3, \cdots, N)$

独立的约束方程可以有好几个，这里可以有

$s=1, 2, 3, \cdots, m,$

而$m<3N$

1．稳定约束与非稳定约束

若约束方程中，不显含时间变量t，则它称为**稳定约束**。相应的约束方程为

$f_s(x_k, y_k, z_k; \dot{x}_k, \dot{y}_k, \dot{z}_k)=0$

若约束方程中，显含时间变量t，则它称为**非稳定约束**。相应的约束方程为

$f_s(x_k, y_k, z_k; \dot{x}_k, \dot{y}_k, \dot{z}_k; t)=0$

2．几何约束和运动约束

只限制各质点空间的位置的约束称为**几何约束**，也称**非无限小约束**。相应的约束方程为

$f_s(x_k, y_k, z_k; t)=0$

若不仅限制其空间位置，而且还限制其运动速度的约束称为**运动约束**，也称**微分约束**。相应的约束方程为

$f_s(x_k, y_k, z_k; \dot{x}_k, \dot{y}_k, \dot{z}_k; t)=0$

若微分约束可积分的话，它将成为几何约束。因此，微分约束只存在它不可积分的情况下才是微分的。称不可积分的运动约束为无限小约束，或非完整的约束。称几何约束（包括可积分的运动约束）为完整约束。受完整约束的质点组称为完整组；受非完整约束的质点组称为非完整组。今后若没特别声明均指完整组。

二.自由度与广义坐标

若质点组由N个质点所组成，各质点之间受有m个独立的几何约束，即存在m个约束方程

$$f_s(x_k, y_k, z_k; t)=0\begin{pmatrix}k=1, 2, 3, \cdots, N\\ s=1, 2, 3, \cdots, m\end{pmatrix}$$

由于x_k，y_k，z_k共$3N$个坐标，那么质点组的独立坐标数为$3N-m=n$，因此，描述质点组位形(位置和形状)的独立变量的数目$n=3N-m$就称为**质点组的自由度**。与此相应的确定质点组的位形所需的独立变量（参数）称为**广义坐标**。在完整约束的情况下，质点组的自由度数是等于质点组的广义坐标的数目。若质点组的自由度数为n时，广义坐标就取q_1，q_2，q_3，…，q_n。

倘若质点组的位置确定了，就意味着组成质点组的每一个质点的位置就确定了。因此，第k个质点的位置可用广义坐标来表示，即

$$\begin{cases}x_k=x_k(q_1, q_2, q_3, \cdots, q_n; t)\\ y_k=y_k(q_1, q_2, q_3, \cdots, q_n; t)\\ z_k=z_k(q_1, q_2, q_3, \cdots, q_n; t)\end{cases}$$

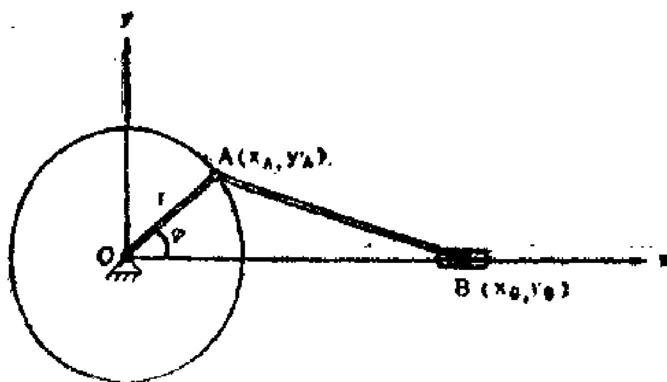


图 1.1

例1. 曲柄连杆机构是由曲柄$oA=r$，连杆$AB=l$，以及十字头B所组成（如图1.1所示）。很显然，此机构的位置可由一个变量，即曲柄的转角φ来决定。因为此机构是一个平面机构，本来需用四个坐标x_A，y_A，x_B，y_B来确定该机构的位置。可是，它受有三个约束：A点被约束在以0为圆心，以r为半径的圆周上运动；B点被约束在x轴上运动；连杆AB的长度l不变。因此，它的自由度为"1"，相应的广义坐标可选为φ。其实，从图示很容易可看出点A和点B的坐标可以通过φ来表示

$$x_A=r\cos\varphi \qquad y_A=r\sin\varphi$$

$$x_B=r\cos\varphi+\sqrt{l^2-r^2\sin^2\varphi} \qquad y_B=0$$

例2. 图1.2所示为双质点系统，两桿均为无重的刚桿，并设此系统只能在xoy平面内运动。本来需用四个坐标x_1，y_1，x_2，y_2来确定系统的位置。可是，它受有两个约

束：杆om_1长度l不变，杆m_1m_2长度l_2不变。因此，系统的自由度为“2”，相应的广义坐标可选为φ_1，φ_2。事实，从图示很容易可看出m_1，m_2的坐标可以通过φ_1，φ_2来表示

$$\begin{cases} x_1 = l_1 \sin\varphi_1 \\ y_1 = l_1 \cos\varphi_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = l_1 \sin\varphi_1 + l_2 \sin\varphi_2 \\ y_2 = l_1 \cos\varphi_1 + l_2 \cos\varphi_2 \end{cases}$$

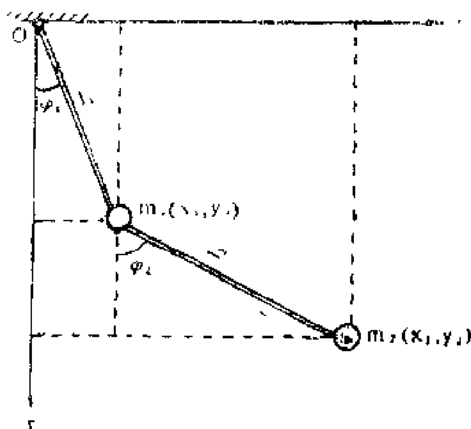


图1.2

例3. 刚体绕定点运动。由刚体运动学得知此种刚体的位置可以用三个独立变量——三个欧勒角来确定。因此，它的自由度为“3”，相应的广义坐标可选用欧勒角θ，φ，ψ。

值得注意的是：系统的自由度是唯一确定的，可是相应的广义坐标的选取就不是唯一的。它可以根据具体的实际问题解决的方便而加以选取。

§1—2 实位移、可能位移和虚位移

1. 实位移： 受约束的质点组在运动过程中，每个质点的位置矢径$\mathbf{r}_k$一方面要满足动力学微分方程和初始条件，另一方面又必须满足约束方程。凡是同时满足这两个要求的运动就是真实运动。在时间t到$t+dt$这无限小时间间隔里，真实运动产生的位移就称为**实位移**，并记为$d\mathbf{r}_k$（$k=1, 2, 3, \cdots, N$）。

2. 可能位移： 若采用曲线坐标来表示$\mathbf{r}_k$时

$\mathbf{r}_k = \mathbf{r}_k(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{3N}, t)$而质点组的约束方程为

$$f_s(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{3N}, t) = 0 \quad (s=1, 2, 3, \cdots, m) \tag{1.1}$$

微分上述约束方程得

$$\sum_{j=1}^{3N} \frac{\partial f_s}{\partial x_j} dx_j + \frac{\partial f_s}{\partial t} dt = 0 \quad (s=1, 2, 3, \cdots, m) \tag{1.2}$$

对稳定约束而言，上式变为

$$\sum_{j=1}^{3N} \frac{\partial f_s}{\partial x_j} dx_j = 0 \quad (s=1, 2, 3, \cdots, m) \tag{1.3}$$

凡是满足约束方程（1.1），亦即满足（1.2）或（1.3）的无限小位移就称为**可能位移**。由于实位移也满足约束方程（1.1），因而实位移是无穷多个的可能位移中的一个。例如一个质点M被约束在一个固定的椭球面上运动（图1.3），其约束方程为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

于是方程（1.3）就变为

$$b^2c^2xdx+a^2c^2ydy+a^2b^2zdz=0$$

满足该方程的$d\mathbf{r}$（dx, dy, dz）有无穷多个，它们就是椭球面上过 M 点(x, y, z)的切平面上的任意矢量 $d\mathbf{r}$（如图1.3所示）。这些均为可能位移，而与质点运动轨迹相切的那个位移（图中实线所示）才是实位移。显而易见，它只是所有可能位移$d\mathbf{r}$ 中的一个。

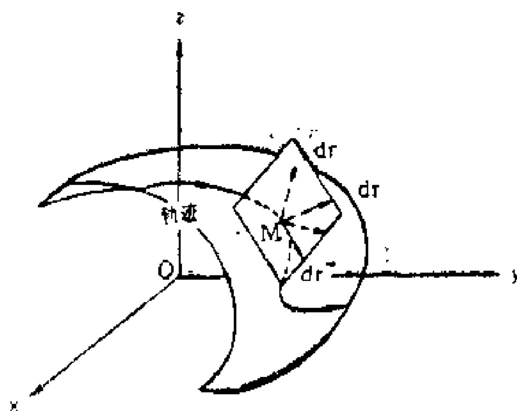


图1.3

3. 虚位移：任意两个可能位移之差定义为**虚位移**，并记为$\delta\mathbf{r}_k$（$k=1, 2, 3, \cdots, N$）或δx_k（$k=1, 2, 3, \cdots, 3N$）。即

$$\delta\mathbf{r}_k=d\mathbf{r}_k'-d\mathbf{r}_k'' \qquad (k=1, 2, 3, \cdots, N)$$

或

$$\delta x_k=dx_k'-dx_k'' \qquad (k=1, 2, 3, \cdots, 3N)$$

式中带“′”或“″”的符号表示两个可能位移。

在稳定约束的情况下有

$$\sum_{j=1}^{3N}\frac{\partial f_s}{\partial x_j}dx_j'=0, \qquad \sum_{j=1}^{3N}\frac{\partial f_s}{\partial x_j}dx_j''=0$$

两式相减并由虚位移的定义得

$$\sum_{j=1}^{3N}\frac{\partial f_s}{\partial x_j}\delta x_j=0 \qquad (s=1, 2, 3, \cdots, m) \tag{1.4}$$

比较（1.3）式与（1.4）式得：在稳定约束的情况下，虚位移就是可能位移，即实位移是无穷多个虚位移中的一个。

在非稳定约束的情况下，可能位移应满足方程（1.2）即

$$\sum_{j=1}^{3N}\frac{\partial f_s}{\partial x_j}dx_j'+\frac{\partial f_s}{\partial t}dt=0$$

$$\sum_{j=1}^{3N}\frac{\partial f_s}{\partial x_j}dx_j''+\frac{\partial f_s}{\partial t}dt=0$$

两式相减并由虚位移的定义同样得出方程（1.4）即

$$\sum_{j=1}^{3N}\frac{\partial f_s}{\partial x_j}\delta x_j=0 \qquad (s=1, 2, 3, \cdots, m)$$

比较(1.2）与（1.4）式得知：dx_j 和 δx_j 满足的方程各不相同。因此，在非稳定约束的情况下，虚位移不一定是可能位移，实位移不一定是无穷多虚位移中的一个。

虚位移是一个抽象的“等时变分”的概念（关于等时变分，待以后讲变分原理时才进一步阐述。等时变分的运算与微分运算相同，但$\delta t=0$。）

若质点组的广义坐标为（q_1，q_2，q_3，…，q_n），那么质点组的可能位移可表为

$$dx_k=\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial x_k}{\partial q_l}dq_l+\frac{\partial x_k}{\partial t}dt \qquad (k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 3N)$$

或

$$d\mathbf{r}_k=\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_l}dq_l+\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial t}dt \qquad (k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ N) \tag{1.5}$$

而虚位移为

$$\delta x_k=\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial x_k}{\partial q_l}\delta q_l \qquad (k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 3N)$$

或

$$\delta\mathbf{r}_k=\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_l}\delta q_l \qquad (k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ N) \tag{1.6}$$

其中δq_l是以广义坐标表示的虚位移。值得注意的是虚位移δx_k与δq_l中，只有δq_l是彼此独立的。

§1—3 虚功原理、拉格朗日不定乘子和约束力

一、理想约束

在研究非自由质点组时，我们有必要将作用在质点组的力（包括内力与外力）分为主动力与约束力两大类。凡是约束物体作用在质点组上的力就称为**约束力**。其他的力均称为**主动力**。

由于力在虚位移上所作的功称为**虚功**。因此，当质点组所受的约束力在任何虚位移上所作的虚功之和等于零时，就称此约束为**理想约束**。其数学式子可表示为

$$\sum_{k=1}^{N}\mathbf{N}_k\cdot\delta\mathbf{r}_k=0$$

其中$\mathbf{N}_k$是作用在第k个质点上的约束力。

显然，没有摩擦力的几何约束都属于理想约束。例如处在光滑固定的曲面上的质点，约束力的方向是沿着固定曲面的法线方向。而质点的虚位移则在切平面内。因而，约束力垂直于任何虚位移，所以约束力在任何虚位移上所作的虚功都等于零。当然，不仅光滑曲面的约束，其他诸如不可伸长的绳子约束，光滑铰链约束，理想的连杆约束，刚性约束以及作纯滚动的刚体所在的曲面等等之类的约束均属理想约束。

二、虚功原理

虚功原理也称虚位移原理。它给静力学问题以普遍的解决方法，因此是静力学的基本原理。

1. 杠杆的虚功原理

吴巴尔笛（1545—1607）首先用虚功原理来处理杠杆的平衡问题。

设杠杆达到平衡如图1.4所示。由初等静力学可得平衡条件为

$$P\cdot\overline{OA}=Q\cdot\overline{OB}$$

即
$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}=\frac{Q}{P} \tag{1.7}$$

当杠杆作任意虚位移（绕O点转一个微小的角度$\delta\varphi$）时，重物P就往下移动$\delta h_P=\overline{A''A'}$，重物$Q$就往上移动$\delta h_Q=\overline{B''B'}$，故$P$、$Q$二力所作的虚功之和为

$$\delta w=-Q\delta h_Q+P\delta h_P \tag{1.8}$$

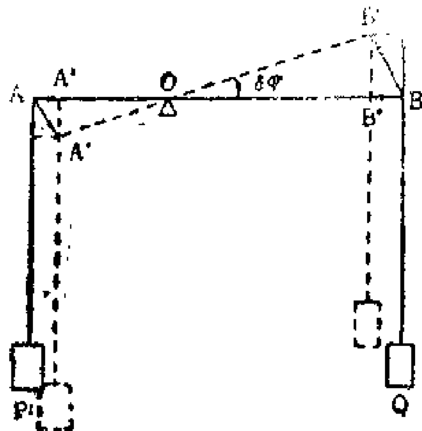


图1.4

因为$\triangle OAA'\backsim\triangle OBB'$，所以$\dfrac{\overline{OA}}{\overline{OB}}=\dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OB'}}$

又$rt\triangle OA''A'\backsim rt\triangle OB''B'$，故得

$$\frac{\overline{OA'}}{\overline{OB'}}=\frac{\overline{A''A'}}{\overline{B''B'}}=\frac{\delta h_P}{\delta h_Q}$$

因此，最后得到

$$\frac{\delta h_P}{\delta h_Q}=\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}$$

即
$$\delta h_P=\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}\delta h_Q \tag{1.9}$$

把（1.7）式与（1.9）式同时代入（1.8）式得

$$\delta w=Q\delta h_Q-Q\delta h_Q=0 \tag{1.10}$$

由此得出杠杆的虚功原理：要使杠杆平衡，其充分必要条件是，作用在杠杆上的一切主动力在任何的虚位移上所作的虚功之和等于零。

继吴巴尔笛之后，斯蒂文(1548—1620)应用此虚功原理研究滑轮组的平衡问题；伽利略（1564—1642）进一步扩展到斜面的研究。到了1717年，才由约翰·伯努力（1667—1748）明确了虚功原理的普遍性和它的表述。

2. 质点组的虚功原理

具有稳定理想约束的质点组，其平衡的充要条件是，所有的主动力在任何的虚位移上所作的虚功之和等于零。

即
$$\sum_{k=1}^{N}\mathbf{F}_k\cdot\delta\mathbf{r}_k=0 \tag{1.11}$$

式中$\mathbf{F}_k$表示作用在第k个质点上的主动力。

必要性的证明：即需证明若质点组处于平衡状态，则它必满足方程（1.11）。设作用在第k个质点上的所有主动力为$\mathbf{F}_k$，约束力为N_k。由于质点组是处于平衡状态，因此

质点组内任一质点k也将处于平衡状态。即

$$\mathbf{F}_k+\mathbf{N}_k=0$$

假定给质点k以任何的虚位移$\delta\mathbf{r}_k$，则主动力$\mathbf{F}_k$与约束力$\mathbf{N}_k$在虚位移$\delta\mathbf{r}_k$上所作的虚功之和为零。即

$$\mathbf{F}_k\cdot\delta\mathbf{r}_k+\mathbf{N}_k\cdot\delta\mathbf{r}_k=0$$

显然，对于质点组内的其余质点，也均有此类等式存在。若将这些等式相加便得到

$$\sum_{k=1}^{N}\mathbf{F}_k\cdot\delta\mathbf{r}_k+\sum_{k=1}^{N}\mathbf{N}_k\cdot\delta\mathbf{r}_k=0$$

由于质点组是受理想约束，故有

$$\sum_{k=1}^{N}\mathbf{N}_k\cdot\delta\mathbf{r}_k=0$$

因此，若质点组处于平衡状态，则它的平衡条件为

$$\sum_{k=1}^{N}\mathbf{F}_k\cdot\delta\mathbf{r}_k=0$$

这就是所要证明的必要条件。

充分性的证明：即需证明若质点组满足方程（1.11），则它必处于平衡状态。采用反证法，假定质点组不处于平衡状态，则它必由静止状态进入运动状态。因此，作用在质点k上所有的主动力$\mathbf{F}_k$与约束力$\mathbf{N}_k$就有一合力$\mathbf{R}_k$，即

$$\mathbf{F}_k+\mathbf{N}_k=\mathbf{R}_k$$

于是，质点k将沿$\mathbf{R}_k$方向产生一个与实位移$d\mathbf{r}_k$相重合的虚位移$\delta\mathbf{r}_k$（因为质点组所受的约束为稳定约束）故有

$$\mathbf{R}_k\cdot\delta\mathbf{r}_k>0$$

进而可得：主动力$\mathbf{F}_k$和约束力$\mathbf{N}_k$在虚位移$\delta\mathbf{r}_k$上所作的虚功之和大于零。即

$$\mathbf{F}_k\cdot\delta\mathbf{r}_k+\mathbf{N}_k\cdot\delta\mathbf{r}_k>0$$

显然，对于质点组内其余质点也均有此类等式存在。若将它们相加起来便得

$$\sum_{k=1}^{N}\mathbf{F}_k\cdot\delta\mathbf{r}_k+\sum_{k=1}^{N}\mathbf{N}_k\cdot\delta\mathbf{r}_k>0$$

由于质点组所受的是理想的约束，则有

$$\sum_{k=1}^{N}\mathbf{N}_k\cdot\delta\mathbf{r}_k=0$$

因此，若质点组不处于平衡状态，则它必满足不等式

$$\sum_{k=1}^{N}\mathbf{F}_k\cdot\delta\mathbf{r}_k>0$$

这与原假设的条件

$$\sum_{k=1}^{N}\mathbf{F}_k\cdot\delta\mathbf{r}_k=0$$

相矛盾，于是质点不可能产生运动，亦即质点组必处于平衡状态。

若$\mathbf{F}_k$与$\delta\mathbf{r}_k$在笛卡尔直角坐标系下，分别表为

$$\mathbf{F}_k=X_k\mathbf{i}+Y_k\mathbf{j}+Z_k\mathbf{k}\text{与}\delta\mathbf{r}_k=\delta x_k\mathbf{i}+\delta y_k\mathbf{j}+\delta z_k\mathbf{k}$$

那么虚功原理（1.11）式又可解析地表为

$$\sum_{k=1}^{N}(X_k\delta x_k+Y_k\delta y_k+Z_k\delta z_k)=0 \tag{1.12}$$

由于虚功原理的表达式（1.11）或（1.12）均不出现约束力项，因此利用虚功原理来解决平衡问题时，不必考虑约束力，这便是虚功原理的最大优点。反之，若要求得约束力，只好另想他法。

下面我们举一些应用虚功原理解决静力学问题的例题。

例1. 求自由刚体的平衡方程。

解： 自由刚体要达到平衡必须满足方程（1.11）即

$$\sum_{k=1}^{N}\mathbf{F}_k\cdot\delta\mathbf{r}_k=0$$

式中$\mathbf{F}_k$表示作用在刚体上任一质点m_k上的主动力，$\delta\mathbf{r}_k$表示质点m_k的虚位移。

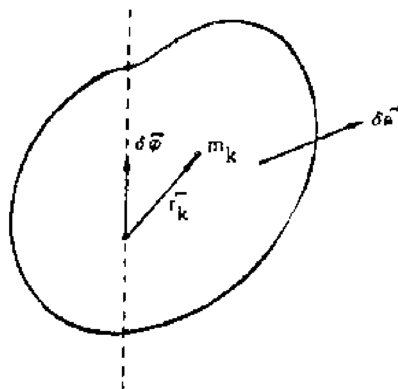


图1.5

由刚体运动学得知，刚体的任何位移均可视为由对刚体所有各点都相同的平动位移$\delta\mathbf{a}$和绕某一瞬轴转过一角度$\delta\boldsymbol{\varphi}$的转动位移所合成。因此，刚体上任一质点$m_k$的位移为

$$\delta\mathbf{r}_k=\delta\mathbf{a}+\delta\boldsymbol{\varphi}\times\mathbf{r}_k$$

式中$\mathbf{r}_k$表示质点m_k的位矢。把$\delta\mathbf{r}_k$的表达式代入上述的平衡条件方程即得

$$\sum_{k=1}^{N}\mathbf{F}_k\cdot(\delta\mathbf{a}+\delta\boldsymbol{\varphi}\times\mathbf{r}_k)=0$$

或

$$\sum_{k=1}^{N}\mathbf{F}_k\cdot\delta\mathbf{a}+\sum_{k=1}^{N}\mathbf{F}_k\cdot(\delta\boldsymbol{\varphi}\times\mathbf{r}_k)=0$$

由矢量代数知道，上述式子又可表为

$$\sum_{k=1}^{N}\mathbf{F}_k\cdot\delta\mathbf{a}+\sum_{k=1}^{N}(\mathbf{r}_k\times\mathbf{F}_k)\cdot\delta\boldsymbol{\varphi}=0$$

由于$\delta\mathbf{a}$和$\delta\boldsymbol{\varphi}$对刚体上任何一点都是一样的，故有

$$\delta\mathbf{a}\cdot\sum_{k=1}^{N}\mathbf{F}_k+\delta\boldsymbol{\varphi}\cdot\sum_{k=1}^{N}\mathbf{r}_k\times\mathbf{F}_k=0$$

又$\delta\mathbf{a}$与$\delta\boldsymbol{\varphi}$是彼此独立的，因此从上述式子便可得到

$$\sum_{k=1}^{N}\mathbf{F}_k=0,\quad \sum_{k=1}^{N}\mathbf{r}_k\times\mathbf{F}_k=0$$

这就是初等静力学中著名的刚体平衡方程。

例2. 均匀杆OA重P_1，能在铅垂平面内绕固定铰链O转动。此杆的A端用铰链连住另一重P_2的均匀杆AB，在AB杆的B端加一水平力F。求平衡时此二杆与水平所成的角度α及β。

解：若选如图1.6所示的坐标系，并设杆OA的长度为l_1，杆AB的长度为l_2。那么由图示可得：

杆OA的质心C_1的坐标为

$$\begin{cases} x_{c_1}=\dfrac{l_1}{2}\cos\alpha \\ y_{c_1}=\dfrac{l_1}{2}\sin\alpha \end{cases}$$

杆AB的质心C_2的坐标为

$$x_{c_2}=l_1\cos\alpha+\frac{l_2}{2}\cos\beta$$

$$y_{c_2}=l_1\sin\alpha+\frac{l_2}{2}\sin\beta$$

B点的坐标为

$$\begin{cases} x_B=l_1\cos\alpha+l_2\cos\beta \\ y_B=l_1\sin\alpha+l_2\sin\beta \end{cases}$$

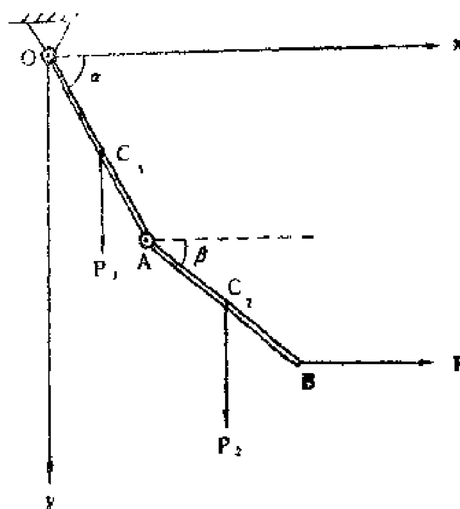


图1.6

现在把OA杆与AB杆以及铰连视为一个质点组（即系统），显然，此系统具有两个自由度，故选α，β为相应的广义坐标。于是

$$\delta y_{c_1}=\frac{l_1}{2}\cos\alpha\delta\alpha$$

$$\delta y_{c_2}=l_1\cos\alpha\delta\alpha+\frac{l_2}{2}\cos\beta\delta\beta$$

$$\delta x_B=-l_1\sin\alpha\delta\alpha-l_2\sin\beta\delta\beta$$

由虚功原理得

$$P_1\delta y_{c_1}+P_2\delta y_{c_2}+F\delta x_B=0$$

将δy_{c_1}与δy_{c_2}以及δx_B的表述式代入上述方程便得

$$\left(\frac{1}{2}P_1l_1\cos\alpha+P_2l_1\cos\alpha-Fl\sin\alpha\right)\delta\alpha+\left(\frac{1}{2}P_2l_2\cos\beta-Fl_2\sin\beta\right)\delta\beta=0$$

因为α，β为广义坐标，所以$\delta\alpha$、$\delta\beta$是彼此独立且任意的。故上述方程要成立它们前面的系数就必须同时等于零。即

$$\begin{cases}\frac{1}{2}P_1 l_1\cos\alpha+P_2 l_1\cos\alpha-Fl_1\sin\alpha=0\\[2ex]\frac{1}{2}P_2 l_2\cos\beta-Fl_2\sin\beta=0\end{cases}$$

由此可得

$$tg\alpha=\frac{P_1+2P_2}{2F},\qquad tg\beta=\frac{P_2}{2F}$$

例3. 均匀杆$AB=a$，重P，一端靠在光滑垂直墙上，另一端靠在光滑固定的侧面上，如欲使杆子在任意位置平衡，求此侧面的形状。

解：选如图 1.7 所示的坐标系，那么

A 点的坐标为

$$\begin{cases}x_A=0\\ y_A=y_B+a\cos\alpha\end{cases}$$

B点的坐标为

$$\begin{cases}x_B=a\sin\alpha\\ y_B=y_B(\alpha)\end{cases}$$

C点的坐标为

$$\begin{cases}x_C=\frac{a}{2}\sin\alpha\\[2ex] y_C=\frac{y_A+y_B}{2}\end{cases}$$

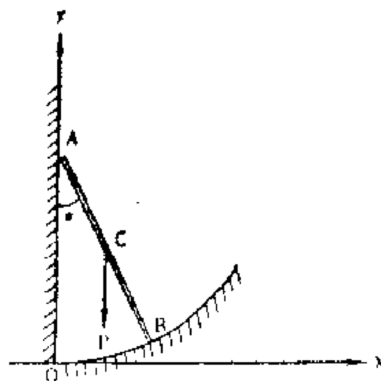


图1.7

显然，此系统具有一个自由度，故选α为相应的广义坐标。

由虚功原理得$P\delta y_c=0$ 即 $\delta y_c=0$

而 $$\delta y_c=\frac{1}{2}\delta(2y_B+a\cos\alpha)=\left(\frac{dy_B}{d\alpha}-\frac{1}{2}a\sin\alpha\right)\delta\alpha$$

于是 $$\left(\frac{dy_B}{d\alpha}-\frac{1}{2}a\sin\alpha\right)\delta\alpha=0$$

因为α为广义坐标，所以$\delta\alpha$是任意的，故上述式子变为

$$\frac{dy_B}{d\alpha}-\frac{1}{2}a\sin\alpha=0$$

因此 $$\int_0^{y_B}dy_B=\int_0^{\alpha}\frac{a}{2}\sin\alpha d\alpha$$

故得 $$y_B=\frac{a}{2}(1-\cos\alpha)$$

即 $$\left(y_B-\frac{a}{2}\right)=-\frac{a}{2}\cos\alpha$$

而 $$x_B=a\sin\alpha$$

于是便得 $$\frac{x_B^2}{a^2}+\frac{\left(y_B-\frac{a}{2}\right)^2}{\left(\frac{a}{2}\right)^2}=1$$

或 $$x_B^2+(2y_B-a)^2=a^2$$——椭园

椭园中心在$x=0$，$y=\frac{a}{2}$处，半长轴为a、半短轴$\frac{a}{2}$。

当然，此题不利用虚功原理求解会更为简便。因为杆随意平衡，其质心C始终在水平直线$y=\frac{a}{2}$上移动，所以$y_B=\frac{a}{2}(1-\cos\alpha)$，而$x_B=a\sin\alpha$，因此便得

$$\frac{x_B^2}{a^2}+\frac{\left(y_B-\frac{a}{2}\right)^2}{\left(\frac{a}{2}\right)^2}=1$$

或 $$x_B^2+(2y_B-a)^2=a^2$$——椭园

此结果与上述利用虚功原理求之所得的结果完全一样。

例4. 均质杆$AB=a$，重Q，放在一固定容器中，此容器的形状为一旋转抛物体，如抛物体的方程为$x^2=2Py$，求平衡位置。

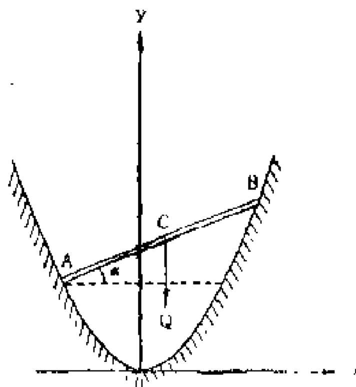


图1.8

解： 选取如图1.8所示的坐标系，A点的坐标为(x_A, y_A)；B点的坐标为(x_B, y_B)。由图示可得

$$x_B-x_A=a\cos\alpha$$

$$y_B-y_A=a\sin\alpha$$

又 $x_A^2=2Py_A$，$x_B^2=2py_B$ 故得

$$\sqrt{2Py_B}+\sqrt{2Py_A}=a\cos\alpha \quad (\text{因为} x_A=-\sqrt{2Py_A}) \qquad (1)$$

$$y_B-y_A=a\sin\alpha \qquad (2)$$

由（1）式得

$$\sqrt{2Py_B}=a\cos\alpha-\sqrt{2Py_A}$$

即 $$2Py_B=a^2\cos^2\alpha-2a\cos\alpha\sqrt{2Py_A}+2py_A$$

故 $$2P(y_B-y_A)=a^2\cos^2\alpha-2a\cos\alpha\sqrt{2Py_A} \qquad (3)$$

把（2）式代入（3）式得

$$2Pa\sin\alpha=a^2\cos^2\alpha-2a\cos\alpha\sqrt{2Py_A}$$

即 $$\sqrt{2Py_A}=\frac{a}{2}\cos\alpha-Ptg\alpha$$

故 $$y_A=\frac{a^2}{8P}\cos^2\alpha-\frac{a}{2}\sin\alpha+\frac{P}{2}tg^2\alpha \qquad (4)$$

因而杆的质心C的纵坐标为

$$y_c=y_A+\frac{a}{2}\sin\alpha=\frac{a^2}{8P}\cos^2\alpha+\frac{P}{2}tg^2\alpha$$

于是，该系统具有一个自由度，故选α为相应的广义坐标。则

$$\delta y_c=\left(P\frac{\sin\alpha}{\cos^3\alpha}-\frac{a^2}{4P}\sin\alpha\cos\alpha\right)\delta\alpha \tag{5}$$

由虚功原理得

$$Q\delta y_c=0\quad 即\delta y_c=0$$

把（5）式代入上述式子即得

$$\left(P\frac{\sin\alpha}{\cos^3\alpha}-\frac{a^2}{4P}\sin\alpha\cos\alpha\right)\delta\alpha=0$$

由于α为广义坐标，所以$\delta\alpha$为任意的，故有

$$P\frac{\sin\alpha}{\cos^3\alpha}-\frac{a^2}{4P}\sin\alpha\cdot\cos\alpha=0$$

即

$$\left(\frac{P}{\cos^3\alpha}-\frac{a^2}{4P}\cos\alpha\right)\sin\alpha=0$$

（i）若$\sin\alpha=0$　得$\alpha=0$

（ii）若$\left(\frac{P}{\cos^3\alpha}-\frac{a^2}{4P}\cos\alpha\right)=0$ 得　$\cos\alpha=\sqrt{\frac{2P}{a}}$

因此，若$a\leqslant 2P$时，则杆AB仅有一平衡位置，此时杆为水平(即$\alpha=0$)；若$a>2P$时，y_c与倾角α的关系如图1.9所示。其平衡位置有二：$\alpha=0$；$\alpha=\arccos\sqrt{\frac{2P}{a}}$其中$\alpha=0$为不稳定平衡位置，而$\alpha=\arccos\sqrt{\frac{2P}{a}}$为稳定平衡位置。此时杆通过抛物线的焦点。

例5. 在半径为r的铅垂半圆钢丝上，穿二重P及Q之小球，此二球用长$2l$的不可伸长的绳连住。不计摩擦力，求平衡位置（即绳和水平所成之角α）。

解： 选如图1.10所示的坐标系，那么由图示可得A点的纵坐标为

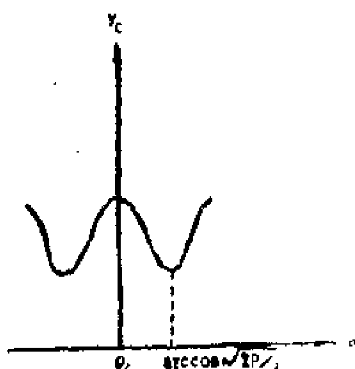


图1.9

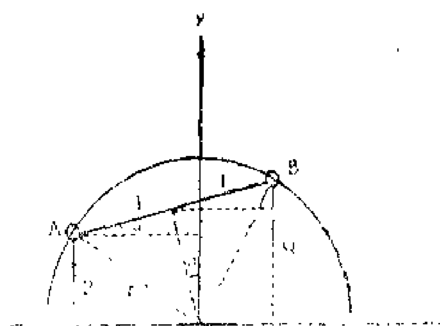


图1.10

$$y_A=\sqrt{r^2-l^2}\cos\alpha-l\sin\alpha$$

B点的纵坐标为

$$y_B=\sqrt{r^2-l^2}\cos\alpha+l\sin\alpha$$

因而此系统（把两个小球与绳子视为一个系统）具有一个自由度，故选α为广义坐标。于是：

$$\delta y_A=(-\sqrt{r^2-l^2}\ \sin\alpha-l\cos\alpha)\delta\alpha$$

$$\delta y_B=(-\sqrt{r^2-l^2}\ \sin\alpha+l\cos\alpha)\delta\alpha$$

由虚功原理得

$$-P\delta y_A-Q\delta y_B=0$$

把上述的δy_A。δy_B的表达式代入即得

$$[P(\sqrt{r^2-l^2}\ \sin\alpha+l\ \cos\alpha)-Q(-\sqrt{r^2-l^2}\ \sin\alpha+l\ \cos\alpha)]\delta\alpha=0$$

因为α为广义坐标，所以$\delta\alpha$为任意的，故有

$$(P+Q)\sqrt{r^2-l^2}\ \sin\alpha-(Q-P)l\cos\alpha=0$$

即
$$tg\alpha=\frac{(Q-P)l}{(P+Q)\sqrt{r^2-l^2}}$$

例6．半径为r的光滑半球形碗，固定在水平面上，一均质棒斜靠在碗缘，一端在碗内，一端则在碗外。若在碗内的长度为a，试证棒全长为$\frac{4(a^2-2r^2)}{a}$

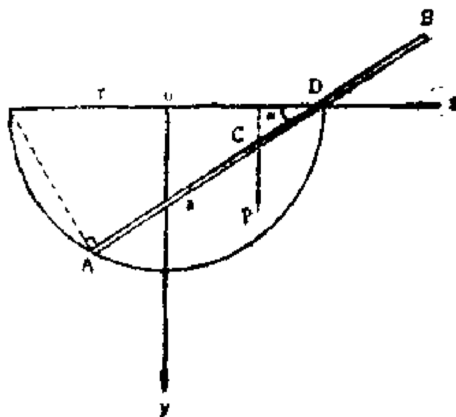


图1.11

证： 选如图1.11所示的坐标系，则棒的质心C的纵坐标为

$$y_c=\left(a-\frac{l}{2}\right)\sin\alpha$$

$$=\left(a-\frac{l}{2}\right)\cdot\frac{\sqrt{4r^2-a^2}}{2r}$$

显然，此棒具有一个自由度，故选a为广义坐标。于是

$$\delta y_c=\frac{1}{2r}\left[\sqrt{4r^2-a^2}\ \delta a-\left(a-\frac{l}{2}\right)\cdot\frac{a\delta a}{\sqrt{4r^2-a^2}}\right]$$

$$=\frac{1}{2r\sqrt{4r^2-a^2}}\left[4r^2-2a^2+\frac{l}{2}a\right]\delta a$$

由虚功原理得

$$P\delta y_c=0\quad 即\quad \delta y_c=\frac{1}{2r\sqrt{4r^2-a^2}}\left[4r^2-2a^2+\frac{l}{2}a\right]\delta a=0$$

因为a为广义坐标，所以δa为任意的。故有

$$\frac{1}{2r\sqrt{4r^2-a^2}}\left[4r^2-2a^2+\frac{l}{2}a\right]=0$$

由题意得知 $a<2r$（即需保证棒的一端在碗内）。

于是 $4r^2-2a^2+\frac{l}{2}a=0$

即 $l=\frac{4(a^2-2r^2)}{a}$ 得证。

例7. 半径为R中心在O点的固定光滑半园槽内，放进两个半径同为r重量分别为P_1与P_2的球O_1及O_2，求OO_2直线与水平所成的角φ。

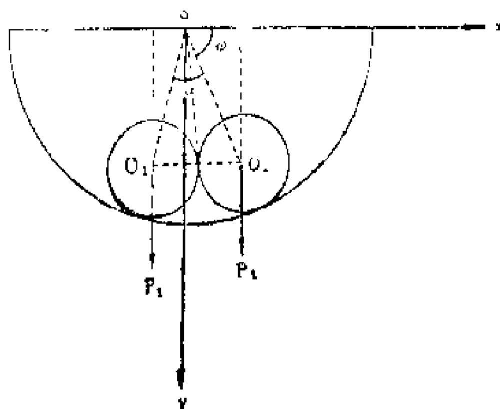


图1.12

解： 选如图1.12所示的坐标系，那么O_1的纵坐标为

$$y_{o_1}=(R-r)\sin(\alpha+\varphi)=(R-r)(\sin\alpha\cos\varphi+\cos\alpha\cdot\sin\varphi) \quad (1)$$

O_2的纵坐标为

$$y_{o_2}=(R-r)\sin\varphi \quad (2)$$

又由图示可得 $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{r}{R-r}$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{(R-r)^2-r^2}}{R-r}=\frac{\sqrt{R^2-2Rr}}{R-r}$$

于是
$$\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{2r\sqrt{R^2-2Rr}}{(R-r)^2} \quad (3)$$

$$\cos\alpha=\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{R^2-2Rr-r^2}{(R-r)^2} \quad (4)$$

把（3）式、（4）式同时代入（1）式即得

$$y_{o_1}=\left(\frac{2r\sqrt{R^2-2Rr}}{R-r}\cos\varphi+\frac{R^2-2Rr-r^2}{R-r}\sin\varphi\right)$$

因此
$$\delta y_{o_1}=\left(-\frac{2r\sqrt{R^2-2Rr}}{R-r}\sin\varphi+\frac{R^2-2Rr-r^2}{R-r}\cos\varphi\right)\delta\varphi \quad (5)$$

$$\delta y_{o_2}=(R-r)\cos\varphi\,\delta\varphi \quad (6)$$

显然，此系统（视两个小球为一个系统）具有一个自由度，故选φ为相应的广义坐标。

由虚功原理得

$$P_1\delta y_{o_1}+P_2\delta y_{o_2}=0 \quad (7)$$

把（5）式与（6）式同时代入（7）式得

$$\left\{\left(P_1\cdot\frac{R^2-2Rr-r^2}{R-r}+P_2(R-r)\right)\cos\varphi-P_1\cdot\frac{2r\sqrt{R^2-2Rr}}{R-r}\cdot\sin\varphi\right\}\delta\varphi=0$$

因为φ为广义坐标，所以$\delta\varphi$为任意，故得

$$\left[p_1\cdot\frac{R^2-2Rr-r^2}{R-r}+p_2(R-r)\right]\cos\varphi-p_1\cdot\frac{2r\sqrt{R^2-2Rr}}{R-r}\sin\varphi=0$$

即
$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{R^2-2Rr-r^2}{2r\sqrt{R^2-2Rr}}+\frac{P_2\cdot(R-r)^2}{P_1\cdot 2r\sqrt{R^2-2Rr}}$$

例8. 两个均质的半球以铰链与一均质的棒连接起来。大的半球重为P_1、半径为r_1，小的半球之重量与半径分别为P_2及r_2；棒长l、重Q。求此系统放在光滑平面上时的

平衡位置，即求二半球的底与水平所成之角φ_1，φ_2及棒与水平之角φ（半径为r的半球重心到球心之距离为$\frac{3}{8}r$）。

解：选如图1.13所示的坐标系，则由图示可得：大球O_1的质心C_1的纵坐标为

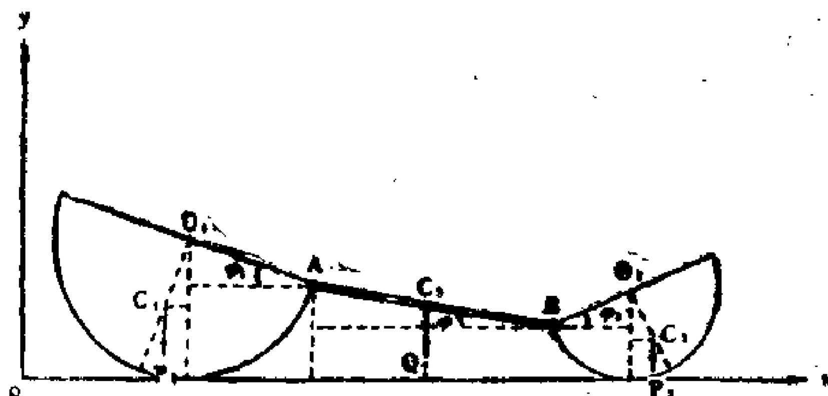


图1.13

$$y_{C_1}=r_1-\frac{3}{8}r_1\cos\varphi_1$$

小球O_2的质心C_2的纵坐标为

$$y_{C_2}=r_2-\frac{3}{8}r_2\cos\varphi_2$$

A点的纵坐标为

$$y_A=r_1-r_1\sin\varphi_1$$

B点的纵坐标为

$$y_B=r_2-r_2\sin\varphi_2$$

棒AB的质心C_3的纵坐标为

$$y_{c3}=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{1}{2}(r_1-r_1\sin\varphi_1+r_2-r_2\sin\varphi_2)$$

于是，该系统具有两个自由度，故选φ_1、φ_2为广义坐标。因此

$$\delta y_{c1}=\frac{3}{8}r_1\sin\varphi_1\ \delta\varphi_1$$

$$\delta y_{c2}=\frac{3}{8}r_2\sin\varphi_2\ \delta\varphi_2$$

$$\delta y_{c3}=\frac{1}{2}(-r_1\cos\varphi_1\delta\varphi_1-r_2\cos\varphi_2\delta\varphi_2)$$

由虚功原理得

$$-P_1\delta y_{c1}-P_2\delta y_{c2}-Q\delta y_{c3}=0$$

把δy_{c1}、δy_{c2}、δy_{c3}的表达式代入上述式子即得

$$\left(\frac{3}{8}P_1r_1\sin\varphi_1-\frac{1}{2}Qr_1\cos\varphi_1\right)\delta\varphi_1+\left(\frac{3}{8}P_2r_2\sin\varphi_2-\frac{1}{2}Qr_2\cos\varphi_2\right)\delta\varphi_2=0$$

由于φ_1、φ_2为广义坐标，所以$\delta\varphi_1$，$\delta\varphi_2$是彼此独立且任意的，故有

$$\begin{cases} \frac{3}{8}P_1r_1\cdot\sin\varphi_1-\frac{1}{2}Qr_1\cdot\cos\varphi_1=0 \\ \frac{3}{8}P_2r_2\cdot\sin\varphi_2-\frac{1}{2}Qr_2\cdot\cos\varphi_2=0 \end{cases}$$

于是，$tg\varphi_1=\frac{4Q}{3P_1}$，　　$tg\varphi_2=\frac{4Q}{3P_2}$

而　　$\sin\varphi=\frac{y_A-y_B}{l}=\frac{1}{l}\left[r_1(1-\sin\varphi_1)-r_2(1-\sin\varphi_2)\right]$

例9. 一小球在一光滑管内，此管成一长轴为$2a$的椭园形状，并位于水平面内。此球受椭园二焦点的吸引，引力和距离之平方成反比，其中一焦点吸引力的比例系数为k^2，另一为k_1^2。求小球在平衡位置时的向径r及r_1。

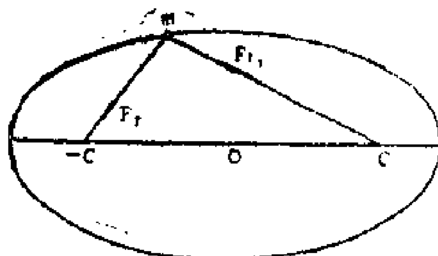


图1.9

解： 此质点具有一个自由度，故选r为广义坐标。由题给条件得

$$r+r_1=2a \tag{1}$$

故有　　$\delta r_1=-\delta r$　　(2)

又由虚功原理得

$$\mathbf{F}r\cdot\delta\mathbf{r}+\mathbf{F}r_1\cdot\delta\mathbf{r}_1=0 \tag{3}$$

考虑到$\mathbf{F}r$及$\mathbf{F}r_1$为有心力，即

$$\mathbf{F}r=-\frac{k^2}{r^2}\cdot\frac{\mathbf{r}}{r},\quad \mathbf{F}r_1=-\frac{k_1^2}{r_1^2}\cdot\frac{\mathbf{r}_1}{r_1}$$

而　　$\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}=r^2$

故有　　$2\mathbf{r}\cdot\delta\mathbf{r}=2r\delta r$

于是（3）式又可表示为

$$-\frac{k^2}{r^2}\delta r-\frac{k_1^2}{r_1^2}\delta r_1=0 \tag{4}$$

把（2）式代入（4）式得

$$\left(\frac{k_1^2}{r_1^2}-\frac{k^2}{r^2}\right)\delta r=0$$

由于r为广义坐标，所以δr为任意的，故有

$$\frac{k_1^2}{r_1^2}-\frac{k^2}{r^2}=0 \tag{5}$$

联立（1）式与（5）式便得

$$r_1=\frac{2ak_1}{k+k_1},\quad r=\frac{2ak}{k+k_1}$$

例10. 一质量为m长度为L之均匀木棒AB，其一端A置于一垂直光滑之墙上，而另

一端B以长为l的无伸缩性的绳固定于墙上O点，ABO面与墙垂直于地面。证明平衡时必须满足：

$$\sin\alpha=\frac{\sqrt{4L^2-l^2}}{l\sqrt{3}},\qquad \sin\beta=\frac{\sqrt{4L^2-l^2}}{L\sqrt{3}}$$

证：选如图1.15所示的坐标系，那么棒AB的质心C的纵坐标为

$$y_c=l\cos\alpha-\frac{L}{2}\cos\beta$$

故有 $$\delta y_c=-l\sin\alpha\delta\alpha+\frac{L}{2}\sin\beta\delta\beta \qquad (1)$$

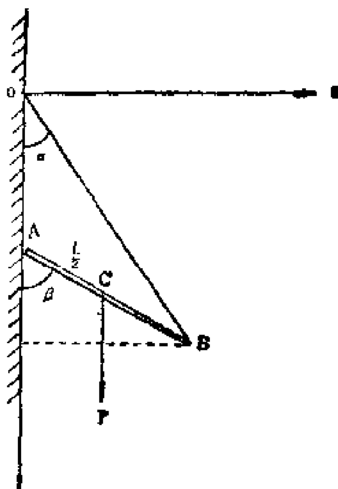


图 1.15

由图示可得

$$l\sin\alpha=L\sin\beta$$

于是 $$l\cos\alpha\delta\alpha=L\cos\beta\delta\beta$$

即 $$\delta\beta=\frac{l\cos\alpha}{L\cos\beta}\delta\alpha \qquad (2)$$

显然，此系统（把棒与绳子视为一系统）具有一个自由度，故选α为相应的广义坐标。于是由虚功原理得

$$P\delta y_c=0$$

即 $$\delta y_c=0 \qquad (3)$$

把（1）式与（2）式同时代入（3）式得

$$\left(-\sin\alpha+\frac{1}{2}tg\beta\cdot\cos\alpha\right)l\delta\alpha=0$$

由于α为广义坐标，所以$\delta\alpha$为任意的，故有

$$-\sin\alpha+\frac{1}{2}tg\beta\cdot\cos\alpha=0$$

即 $tg\beta=2tg\alpha$ 或者 $\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}=\dfrac{2\sin\alpha}{\cos\alpha}$ （4）

由于 $l\sin\alpha=L\sin\beta$ 故有

$$\begin{cases}\sin\beta=\dfrac{l}{L}\sin\alpha\\ \cos\beta=\sqrt{1-\left(\dfrac{l}{L}\right)^2\sin^2\alpha}\end{cases} \qquad (5)$$

把（5）式代入（4）式得

$$\frac{l\sin\alpha}{\sqrt{L^2-l^2\sin^2\alpha}}=\frac{2\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$$

或者 $$l^2(1-\sin^2\alpha)=4(L^2-l^2\sin^2\alpha)$$

于是 $$\sin\alpha=\frac{\sqrt{4L^2-l^2}}{l\sqrt{3}} \qquad (6)$$

把（6）式代入（5）式便得

$$\sin\beta=\frac{\sqrt{4L^2-l^2}}{L\sqrt{3}}$$

故得证。

例11. 重为P的棍子AB，以两根平行的绳子CA及DB挂起，今将棍子移至新位置$A'B'$并加一力矩为M的力偶，使之维持此位置。如$CA=AB=DB=l$，求棍子转动的角度φ。

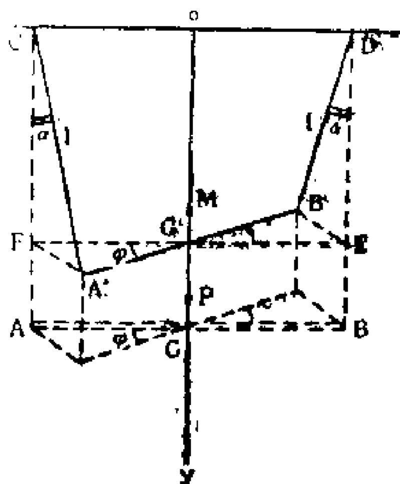


图1.16

解： 选如图1.16所示的坐标系，那么棍子AB的质心G'的纵坐标为

$$y_G'=l\cos\alpha$$

由图示可得$\Delta G'A'F$为等腰三角形（因为$\overline{A'G'}=\overline{FG'}=\frac{l}{2}$）

故 $$\overline{A'F}=2\cdot\frac{l}{2}\sin\frac{\varphi}{2}=l\sin\frac{\varphi}{2} \quad (1)$$

又在$rt\Delta CFA'$中 $$\overline{A'F}=l\sin\alpha \quad (2)$$

把（1）式代入（2）式得 $$\alpha=\frac{\varphi}{2} \quad (3)$$

因此 $$y_G'=l\cos\alpha=l\cos\frac{\varphi}{2}$$

于是 $$\delta y_G'=-\frac{l}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\delta\varphi \quad (4)$$

显然，此系统具有一个自由度，故选φ为广义坐标。

由虚功原理得

$$P\delta y_G'+M\delta\varphi=0 \quad (5)$$

把（4）式代入（5）式得

$$\left(-\frac{1}{2}Pl\sin\frac{\varphi}{2}+M\right)\delta\varphi=0$$

由于φ为广义坐标，所以$\delta\varphi$为任意的，故有

$$-\frac{1}{2}Pl\sin\frac{\varphi}{2}+M=0$$

即得 $$\sin\frac{\varphi}{2}=\frac{2M}{Pl}$$

例12. 半径为r、重为P之球悬在长b并结于天花板上A点之绳上，于此A点另用铰链固定一根长$2a$重Q的均质棒。在图示之平衡状态时，绳及棒与铅垂线所成的角度分别为φ及α。求此二角。

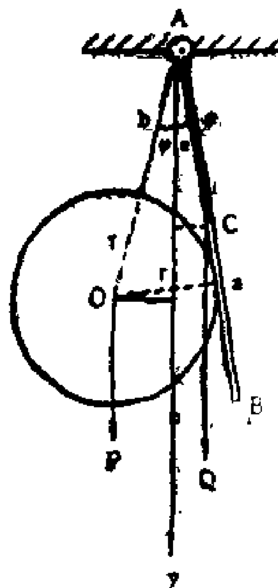


图1.17

解： 选图1.17所示的坐标系，则球心O的纵坐标与杆AB的质心C的纵坐标分别为

$$y_O = (b+r)\cos\varphi$$
$$y_C = a\cos\alpha$$

故有 $\delta y_O = -(b+r)\sin\varphi\,\delta\varphi$

$$\delta y_C = -a\sin\alpha\,\delta\alpha$$

由图示可得

$$\sin(\varphi+\alpha) = \frac{r}{b+r}\ ,\qquad \cos(\varphi+\alpha) = \frac{\sqrt{(b+r)^2-r^2}}{b+r}$$

即 $$\sin\varphi\cdot\cos\alpha + \cos\varphi\cdot\sin\alpha = \frac{r}{b+r} \qquad (1)$$

$$\cos\varphi\cdot\cos\alpha - \sin\varphi\cdot\sin\alpha = \frac{\sqrt{(b+r)^2-r^2}}{b+r} \qquad (2)$$

将（1）式乘$\sin\varphi$与（2）式乘$\cos\varphi$相加得

$$\cos\alpha = \frac{r}{b+r}\sin\varphi + \frac{\sqrt{(b+r)^2-r^2}}{b+r}\cos\varphi$$

于是 $$-\sin\alpha\,\delta\alpha = \left(\frac{r}{b+r}\cos\varphi - \frac{\sqrt{(b+r)^2-r^2}}{b+r}\sin\varphi\right)\delta\varphi \qquad (3)$$

若把棒 AB 与球O及绳子视为一个系统，那么显然此系统具有一个自由度，故选 φ 为相应的广义坐标。因而，由虚功原理得

$$P\delta y_O + Q\delta y_c = 0$$

即 $$-P(b+r)\sin\varphi\,\delta\varphi - Qa\sin\alpha\,\delta\alpha = 0 \qquad (4)$$

把（3）式代入（4）式得

$$-P(b+r)\sin\varphi\,\delta\varphi + Qa\left(\frac{r}{b+r}\cos\varphi - \frac{\sqrt{(b+r)^2-r^2}}{b+r}\sin\varphi\right)\delta\varphi = 0$$

或 $$\frac{1}{b+r}\left\{-\left[P(b+r)^2 + Qa\sqrt{(b+r)^2-r^2}\right]\sin\varphi + rQa\cos\varphi\right\}\delta\varphi = 0$$

由于φ为广义坐标，所以$\delta\varphi$为任意的。故有

$$-\left[P(b+r)^2 + Qa\sqrt{(b+r)^2-r^2}\right]\sin\varphi + rQa\cos\varphi = 0$$

即得 $$\operatorname{ctg}\varphi = \frac{\sqrt{b(b+2r)}}{r} + \frac{P(b+r)^2}{Qar} \qquad (5)$$

若将（1）式乘$\sin\alpha$与（2）式乘$\cos\alpha$而后相加便得

$$\cos\varphi = \frac{r}{b+r}\sin\alpha + \frac{\sqrt{(b+r)^2-r^2}}{b+r}\cos\alpha$$

于是 $$-\sin\varphi\,\delta\varphi = \left(\frac{r}{b+r}\cos\alpha - \frac{\sqrt{(b+r)^2-r^2}}{b+r}\sin\alpha\right)\delta\alpha \qquad (6)$$

把（6）式代入（4）式得

$$P(b+r)\left[\frac{r}{b+r}\cos\alpha - \frac{\sqrt{(b+r)^2-r^2}}{b+r}\sin\alpha\right]\delta\alpha - Qa\sin\alpha\,\delta\alpha = 0$$

即 $$\left[Pr\cos\alpha - \left(P\sqrt{(b+r)^2-r^2} + Qa\right)\sin\alpha\right]\delta\alpha = 0$$

由于α为广义坐标，所以$\delta\alpha$为任意的，故有

$$Pr\cos\alpha-(P\sqrt{(b+r)^2-r^2}+Qa)\sin\alpha=0$$

即得 $$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\sqrt{b(b+2r)}}{r}+\frac{Qa}{Pr}$$

例13. 两根均匀的杆AB及BC，其中一根比其它一根短一半（$AB=\frac{1}{2}BC=2l$），二杆固结在一起成$\varphi=60°$角。今将此系统之一端悬于绳上，求平衡时CB杆与水平线所成的角度α。

解： 选如图1.18所示的坐标系，那么曲杆AB段的质心的纵坐标为

$$y_{P_1}=l\sin(\varphi-\alpha)$$

曲杆BC段的质心的纵坐标为

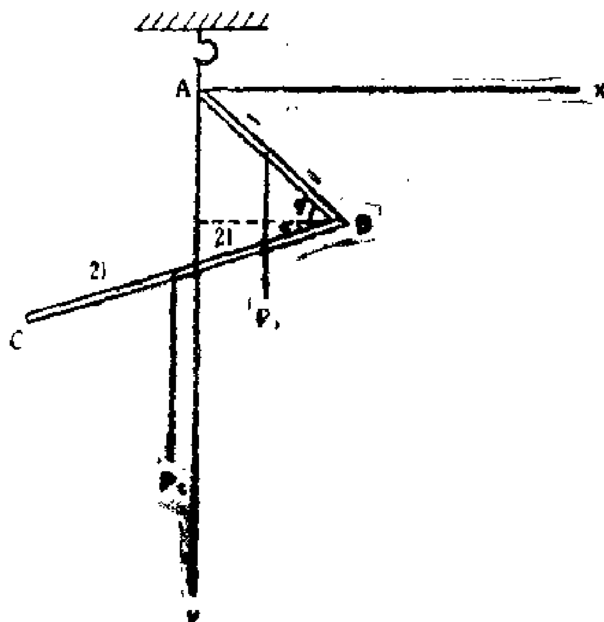


图 1.18

$$y_{P_2}=2l\sin\alpha+2l\sin(\varphi-\alpha)$$

于是 $$\delta y_{P_1}=-l\cos(\varphi-\alpha)\delta\alpha$$

$$\delta y_{P_2}=2l\cos\alpha\delta\alpha-2l\cos(\varphi-\alpha)\delta\alpha$$

显然，曲杆ABC具有一个自由度，故选α为广义坐标。假设曲杆ABC每单位长度的重量为ρ时，那么 $P_1=2l\rho$， $P_2=4l\rho$，于是由虚功原理得

$$P_1\delta y_{P_1}+P_2\delta y_{P_2}=0$$

即 $$2l\rho[-l\cos(\varphi-\alpha)\delta\alpha]+4l\rho[2l\cos\alpha\,\delta\alpha-2l\cos(\varphi-\alpha)\delta\alpha]=0$$

或 $$[4\cos\alpha-5\cos(\varphi-\alpha)]2l^2\rho\delta\alpha=0$$

由于α为广义坐标，所以$\delta\alpha$为任意的，故上式有

$$4\cos\alpha-5\cos(\varphi-\alpha)=0$$

即 $$4\cos\alpha-5\cos\varphi\cdot\cos\alpha-5\sin\varphi\cdot\sin\alpha=0$$

于是 $$(4-5\cos\varphi)\cos\alpha=5\sin\varphi\cdot\sin\alpha$$

即得 $$\operatorname{tg}\alpha=\frac{4-5\cos\varphi}{5\sin\varphi}$$

由于$\varphi=60°$　故得　$\text{tg}\alpha=\frac{\sqrt{3}}{5}$

例14. 绕过滑轮E和F的绳子AEF的一端挂一重物Q，此绳是用来关闭一门$ABCD$。一垂直于门面的力P作用在门上一点K，并使门启开的角度为α时处于平衡。求P与Q间的关系。

解： 把门$ABCD$、滑轮E和F、绳子AEF以及重物Q视为一个系统。显然，此系统具有一个自由度，故选α为广义坐标。由图示得知

$$\overline{AE}=2a\sin\frac{\alpha}{2}$$

故有　$$\delta(\overline{AE})=a\cos\frac{\alpha}{2}\delta\alpha$$

于是，当α角有一个虚角位移$\delta\alpha$时，那么由虚功原理得

$$Pa\delta\alpha-Q\delta(\overline{AE})=0$$

即　$$Pa\delta\alpha-Qa\cos\frac{\alpha}{2}\delta\alpha=0$$

或　$$(P-Q\cos\frac{\alpha}{2})a\delta\alpha=0$$

由于α为广义坐标，所以$\delta\alpha$为任意的，故得

$$P-Q\cos\frac{\alpha}{2}=0$$

即　$$P=Q\cos\frac{\alpha}{2}$$

例15. 求图示压榨机上诸力的平衡条件，如水平力P和$-P$垂直作用于把手上，l为每一把手的长，h为螺距。

解： 设在把手力矩（$P\cdot 2l$）作用下，把手转过$\delta\varphi$时，那么压榨机在铅直方向上就产生了δS位移，于是

$$\frac{\delta\varphi}{2\pi}=\frac{\delta S}{h}$$

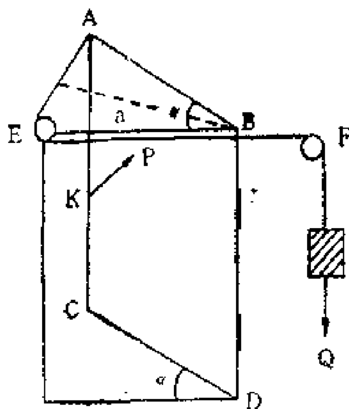


图　1.19

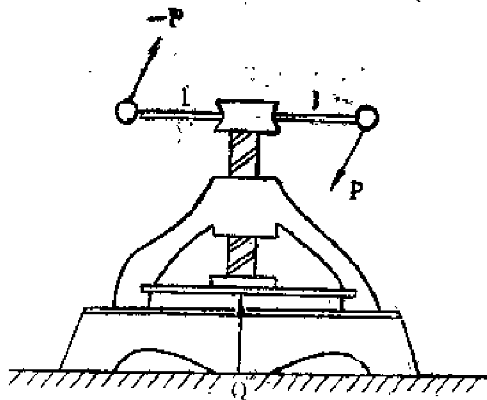


图　1.20

显然，此系统具有一个自由度，故选φ为广义坐标。因此，由虚功原理得

$$P\cdot 2l\delta\varphi - Q\delta S = 0$$

即 $$(P\cdot 2l - Q\cdot\frac{h}{2\pi})\delta\varphi = 0$$

由于φ为广义坐标，所以$\delta\varphi$为任意的，于是

$$P\cdot 2l - Q\cdot\frac{h}{2\pi} = 0$$

故得 $$Q = 4\pi P\cdot\frac{l}{h}$$

例16. 均匀杆子AC及BC固结成直角于C点，而构成不变形之系统，此系统在垂直面内靠在一光滑的半径为r的水平圆柱上而平衡。求平衡时的位置（AC边与铅垂线所成的角度为α）。$AC=2a$　$CB=2b$。

解： 选如图1.21所示的坐标系，那么曲杆AC段质心F的纵坐标为$y_F=\overline{FI}$；BC段质

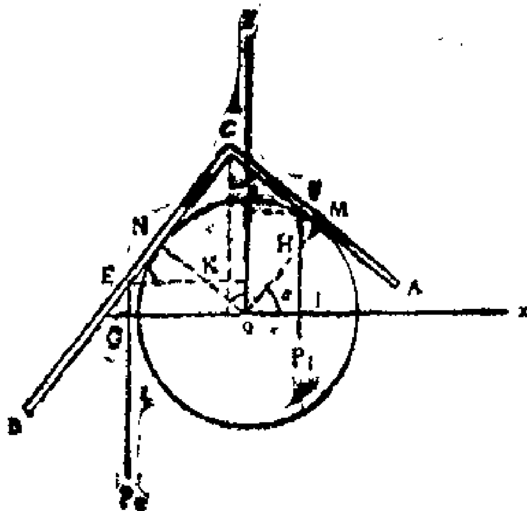


图 1.21

心E的纵坐标为$y_E=\overline{EG}$。由图示可得

$$\overline{EN} = \overline{EC} - \overline{NC} = b - r$$

$$\overline{KN} = \overline{EN}\cdot \mathrm{tg}\alpha = (b-r)\mathrm{tg}\alpha$$

所以 $$\overline{OK} = r - \overline{KN} = r-(b-r)\mathrm{tg}\alpha$$

故 $$y_E = \overline{EG} = \overline{OK}\cos\alpha = [r-(b-r)\mathrm{tg}\alpha]\cos\alpha = r\cos\alpha - (b-r)\sin\alpha$$

于是 $$\delta y_E = -r\sin\alpha\delta\alpha - (b-r)\cos\alpha\delta\alpha$$

又 $$\overline{FM} = \overline{MC} - \overline{FC} = r - a$$

$$\overline{MH} = \overline{FM}\cdot\mathrm{tg}\alpha = (r-a)\mathrm{tg}\alpha$$

$$\overline{FH} = \frac{\overline{FM}}{\cos\alpha} = \frac{r-a}{\cos\alpha}$$

$$\overline{OH}=r-\overline{MH}=r-(r-a)\text{tg}\alpha$$

所以 $\overline{HI}=\overline{OH}\sin\alpha=[r-(r-a)\text{tg}\alpha]\sin\alpha$

故 $y_F=\overline{FI}=\overline{FH}+\overline{HI}=\dfrac{r-a}{\cos\alpha}+[r-(r-a)\text{tg}\alpha]\sin\alpha$

于是 $$\delta y_F=\frac{(r-a)\sin\alpha}{\cos^2\alpha}\delta\alpha+r\cos\alpha\,\delta\alpha-(r-a)\left[\frac{2\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha+\sin^3\alpha}{\cos^2\alpha}\right]\delta\alpha$$

$$=r\cos\alpha\,\delta\alpha-\frac{(r-a)\sin\alpha(2\cos^2\alpha+\sin^2\alpha-1)}{\cos^2\alpha}\delta\alpha$$

$$=r\cos\alpha\,\delta\alpha-(r-a)\sin\alpha\,\delta\alpha$$

显然，此系统具有一个自由度，故选α为相应的广义坐标。若设曲杆ACB的每单位长度的重量为ρ，那么AC段的重量$P_1=2a\rho$；BC段的重量$P_2=2b\rho$

由虚功原理得

$$-P_1\delta y_F-P_2\delta y_E=0$$

把P_1、P_2与δy_F、δy_E的表式代入上式得

$$2a\rho[r\cos\alpha\delta\alpha-(r-a)\sin\alpha\delta\alpha]+2b\rho[-r\sin\alpha\delta\alpha-(b-r)\cos\alpha\delta\alpha]=0$$

即 $\{a[r\cos\alpha-(r-a)\sin\alpha]+b[-r\sin\alpha-(b-r)\cos\alpha]\}2\rho\delta\alpha=0$

或 $\{[(a+b)r-b^2]\cos\alpha-[(a+b)r-a^2]\sin\alpha\}2\rho\delta\alpha=0$

由于α为广义坐标，所以$\delta\alpha$为任意的，故有

$$[(a+b)r-b^2]\cos\alpha-[(a+b)r-a^2]\sin\alpha=0$$

即 $$\text{tg}\alpha=\frac{(a+b)r-b^2}{(a+b)r-a^2}$$

例17. 小圈A可以在垂直放着的、以O点为中心的钢圈上自由滑动，小圈一边系一重P的砝码。另一边固定一绳子，此绳绕过位于钢圈上最高点B的小滑轮后，其另一端悬一重Q的重物。求平衡时之$\varphi=\angle AOB$。

解：选如图示的坐标系，并设绳子的总长为l，那么重物Q与砝码P的纵坐标分别为

$$y_Q=r-\left(l-2r\sin\frac{\varphi}{2}-\overline{AP}\right)$$

$$y_P=r\cos\varphi-\overline{AP}$$

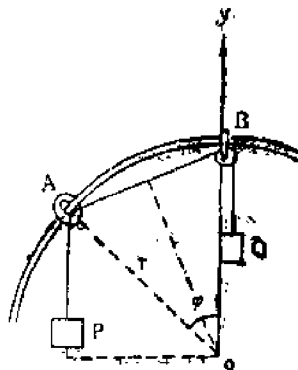


图 1.22

由于l与$\overline{AP}$均为常数，所以

$$\delta y_Q=2r\cos\frac{\varphi}{2}\cdot\frac{1}{2}\delta\varphi=r\cos\frac{\varphi}{2}\delta\varphi$$

$$\delta y_P=-r\sin\varphi\delta\varphi$$

显然，此系统具有一个自由度，故选φ为相应的广义坐标。于是，由虚功原理得

$$-P\delta y_P-Q\delta y_Q=0$$

即 $$-Pr\sin\varphi\delta\varphi+Q\cdot 2r\cos\frac{\varphi}{2}\cdot\frac{1}{2}\delta\varphi=0$$

或者　　$(-2P\sin\frac{\varphi}{2}+Q)r\cos\frac{\varphi}{2}\delta\varphi=0$

由于φ为广义坐标，所以$\delta\varphi$为任意的，故有

$$\begin{cases}-2P\sin\frac{\varphi}{2}+Q=0\\ \cos\frac{\varphi}{2}=0\end{cases}$$

即得　$$\begin{cases}Q=2P\sin\frac{\varphi}{2}\longrightarrow\varphi=2\arcsin\frac{Q}{2P}\\ \varphi=\pi\text{（不合题意）}\end{cases}$$

例18. 两根位于垂直平面内的均质棒之底端彼此相靠地搁在光滑地面上，其上端则靠在两堵垂直而光滑的墙上。棒长$2a_1$与$2a_2$，其重为P_1与P_2。求平衡时棒之水平倾角α_1与α_2之间的关系。

解： 选如图1.23所示的坐标系，那么两根均质棒的质心C_1与C_2的纵坐标分别为

$$y_{C_1}=a_1\sin\alpha_1$$
$$y_{C_2}=a_2\sin\alpha_2$$

于是　$$\begin{cases}\delta y_{C_1}=a_1\cos\alpha_1\delta\alpha_1\\ \delta y_{C_2}=a_2\cos\alpha_2\delta\alpha_2\end{cases}$$

若设地面的宽度为l（常数）那么由约束条件得

$$2a_1\cos\alpha_1+2a_2\cos\alpha_2=l$$

故有　$-2a_1\sin\alpha_1\delta\alpha_1-2a_2\sin\alpha_2\delta\alpha_2=0$

即　$a_2\delta\alpha_2=-\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}a_1\delta\alpha_1$

显然，此系统具有一个自由度，故选α_1为相应的广义坐标。于是，由虚功原理得

$$-P_1\delta y_{C_1}-P_2\delta y_{C_2}=0$$

亦即　$P_1a_1\cos\alpha_1\delta\alpha_1+P_2a_2\cos\alpha_2\delta\alpha_2=0$

或　$(P_1\cos\alpha_1-P_2\cdot\frac{\cos\alpha_2}{\sin\alpha_2}\cdot\sin\alpha_1)a_1\delta\alpha_1=0$

由于α_1为广义坐标，所以$\delta\alpha_1$为任意的。因此

得到$P_1\cos\alpha_1-P_2\cdot\frac{\cos\alpha_2}{\sin\alpha_2}\cdot\sin\alpha_1=0$

即　$\frac{P_1}{P_2}=\frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{tg}\alpha_2}$

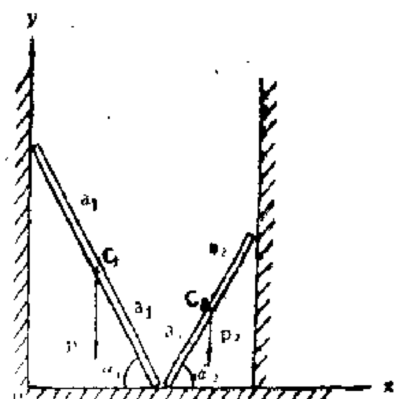


图 1.23

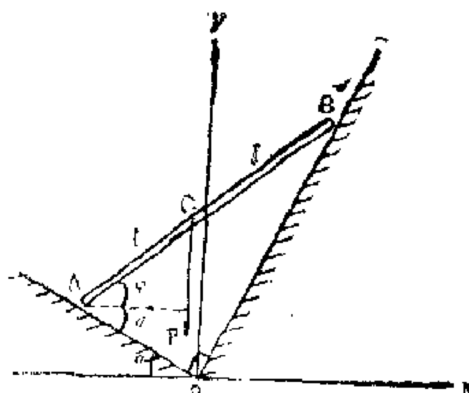


图 1.24

例19. 长$2l$、重P的均匀棒子在铅垂平面内处于平衡状态，其两端靠在互相垂直的两斜面上，如已知其中一斜面与水平成α角，求棒与水平所成的角度φ及AO的距离。

解： 选如图1.24所示的坐标系，那么AB棒的质心C的纵坐标为

$$y_C=l\sin\varphi+\overline{OA}\sin\alpha$$

而由图示得知

$$\overline{OA}=2l\cos(\varphi+\alpha)$$

故 $y_C=l\sin\varphi+2l\cos(\varphi+\alpha)\sin\alpha$

于是 $\delta y_C=l\cos\varphi\delta\varphi-2l\sin\alpha\cdot\sin(\varphi+\alpha)\delta\varphi$

显然，此系统具有一个自由度，故选φ为相应的广义坐标。则由虚功原理得

$$P\delta y_C=0$$

即 $l\cos\varphi\delta\varphi-2l\sin\alpha\sin(\varphi+\alpha)\delta\varphi=0$

或者 $[l\cos\varphi-2l\sin\alpha(\sin\varphi\cdot\cos\alpha+\cos\varphi\cdot\sin\alpha)]\delta\varphi=0$

由于φ为广义坐标，所以$\delta\varphi$为任意的，故有

$$\cos\varphi-2\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\sin\varphi-2\sin^2\alpha\cdot\cos\varphi=0$$

亦即 $\cos\varphi(1-2\sin^2\alpha)-\sin2\alpha\cdot\sin\varphi=0$

或者 $\cos\varphi\cdot\cos2\alpha-\sin\varphi\cdot\sin2\alpha=0$

于是 $\cos(\varphi+2\alpha)=0$

故得 $\varphi+2\alpha=\dfrac{\pi}{2}$

即 $\varphi=\dfrac{\pi}{2}-2\alpha$

而 $\overline{OA}=2l\cos(\varphi+\alpha)=2l\cos(\dfrac{\pi}{2}-\alpha)=2l\sin\alpha$

大家知道，由传统的虚功原理是求不出约束力的。严格地说来，若要求得约束力，只好待后面将要讲述的拉格朗日不定乘子法时，才去解决它。不过，我们也可灵活辩证地去直接利用虚功原理来求得约束力与摩擦力。其基本方法是：

（1）利用约束公理，去掉约束代之为约束力。此时，把约束力也视为主动力，然后利用虚功原理求得约束力。

（2）对非理想约束，我们可将约束力分解为垂直曲面的约束力N，与平行于曲面的约束力$N_{//}$，然后把$N_{//}$也当作主动力（即摩擦力），进而利用虚功原理求得摩擦力。下面举5个例子来加以说明。

例20．一活动梯子由以铰链C及链子DE连接起来的两个相同部份所组成。当一个人站在梯子上的H处时，求链子的张力T。已知：$AC=BC=2l$；$CH=x$，$AD=BE=a$；活动梯子的重量为$2P$；人的重量为Q；$\angle CAB=\angle CBA=\alpha$。

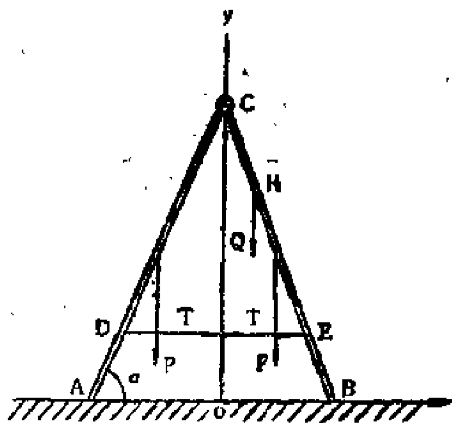


图 1.25

解：为了照样能利用虚功原理求得链子的张力T，我们把链子的约束去掉，代之为链子的张力T。只不过，此时把链子的张力T也视为主动力。

若选如图1.25所示的坐标系，则由图示可得活动梯子两部份的质心纵坐标为

$$y_P = l\sin\alpha$$

链子的 E 点的横坐标为

$$x_E = 2l\cos\alpha - a\cos\alpha = (2l - a)\cos\alpha$$

链子的 D 点的横坐标为

$$x_D = -(2l - a)\cos\alpha$$

H 点的纵坐标为

$$y_H = (2l - x)\sin\alpha$$

故有 $\delta y_P = l\cos\alpha\delta\alpha,\quad \delta x_E = -(2l - a)\sin\alpha\delta\alpha$

$$\delta x_D = (2l - a)\sin\alpha\delta\alpha,\quad \delta y_H = (2l - x)\cos\alpha\delta\alpha$$

显然，此系统具有一个自由度，故选 α 为相应的广义坐标。于是，由虚功原理得

$$-2P\delta y_P - Q\delta y_H - T\delta x_E + T\delta x_D = 0$$

即 $[-2Pl\cos\alpha - Q(2l - x)\cos\alpha + 2T(2l - a)\sin\alpha]\delta\alpha = 0$

或者 $\{-[2Pl + Q(2l - x)]\cos\alpha + 2T(2l - a)\sin\alpha\}\delta\alpha = 0$

由于 α 为广义坐标，所以 $\delta\alpha$ 为任意的，故得

$$-[2Pl + Q(2l - x)]\cos\alpha + 2T(2l - a)\sin\alpha = 0$$

即 $$T = \frac{2Pl + Q(2l - x)}{2(2l - a)}\text{ctg}\alpha$$

例21. 长 $2l$、重 P 之均匀棒之两端靠在夹角为 α 的两个固定光滑的平面上，棒与水平面成 β 角。此棒由于一端固定于定点 C，另一端固结于棒上 D 点之绳的支持而平衡。绳与水平成 γ 角。求绳的张力 T。

解：为了照常能利用虚功原理求得绳子的张力 T，我们把绳子的约束去掉，代之为绳子的张力 T。只不过，此时把张力 T 也视为主动力。

若选取如图1.26所示的坐标系，那么棒的质心的纵坐标为：

$$y_P = l\sin\beta$$

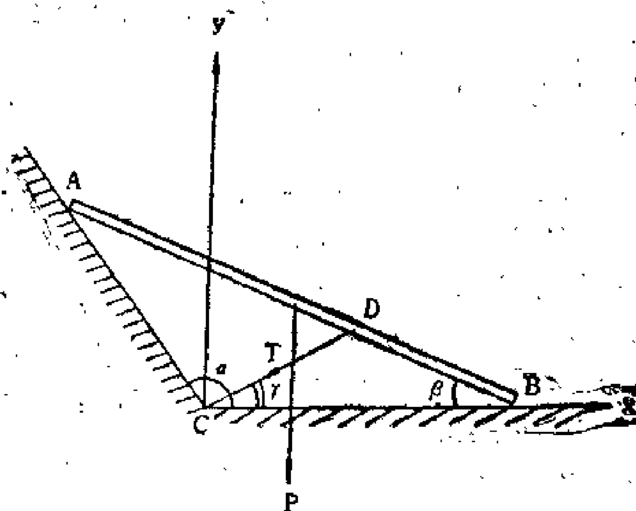


图1.26

D 点的坐标为

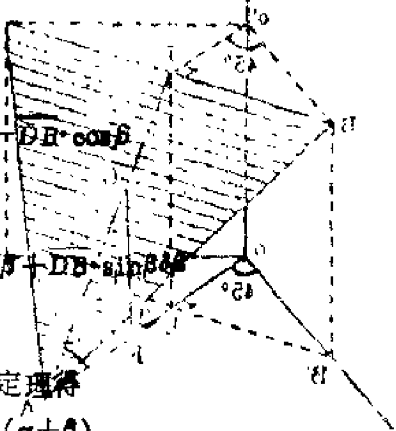
$$\begin{cases} x_D=\overline{BC}-\overline{DB}\cos\beta \\ y_D=\overline{DB}\sin\beta \end{cases}$$

由于在 ΔABC 中，根据正弦定理得

$$\overline{BC}=\frac{2l}{\sin\alpha}\cdot\sin(\alpha+\beta)$$

所以 D 点的横坐标又可表示为

$$x_D=\frac{2l}{\sin\alpha}\cdot\sin(\alpha+\beta)-\overline{DB}\cdot\cos\beta$$



于是 $\delta y_r=l\cos\beta\delta\beta$

$$\delta x_D=-\frac{2l}{\sin\alpha}\cdot\cos(\alpha+\beta)\delta\beta+\overline{DB}\cdot\sin\beta\delta\beta$$

$$\delta y_D=\overline{DB}\cos\beta\delta\beta$$

由于在 ΔCDB 中，根据正弦定理得

$$\overline{DB}=\frac{2l}{\sin\alpha}\cdot\frac{\sin\gamma\cdot\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\beta+\gamma)}$$

所以 δx_D 与 δy_D 又可表示为

$$\delta x_D=\frac{2l}{\sin\alpha}\cdot\cos(\alpha+\beta)\delta\beta+\frac{2l}{\sin\alpha}\cdot\frac{\sin\gamma\cdot\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\beta+\gamma)}\cdot\sin\beta\delta\beta$$

$$\delta y_D=\frac{2l}{\sin\alpha}\cdot\frac{\sin\gamma\cdot\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\beta+\gamma)}\cos\beta\delta\beta$$

显然，此系统具有一个自由度，故选 β 为相应的广义坐标。于是，由虚功原理得

$$-P\delta y_r-T\sin\gamma\delta y_D-T\cos\gamma\delta x_D=0$$

把上述的 δx_D 与 δy_D 以及 δy_r 的表示式代入上式便得

$$\left\{Pl\cos\beta+\frac{2Tl}{\sin\alpha}\left[\sin\gamma\cdot\sin(\alpha+\beta)+\cos\gamma\cdot\cos(\alpha+\beta)\right]\right\}\delta\beta=0$$

由于 β 为广义坐标，所以 $\delta\beta$ 为任意的，故有

$$P\cos\beta+\frac{2T}{\sin\alpha}\cdot\cos(\alpha+\beta-\gamma)=0$$

即

$$T=-\frac{P\sin\alpha\cdot\cos\beta}{2\cos(\alpha+\beta-\gamma)}$$

例22. 一重为 P 边长为 a 的等边三角形平板以其顶点 A、B 与 C 搁置于三相互垂直的平面 xoy，yoz 及 zox 上。今以一绳联结顶点 A 及 O，绳 OA 等分 xoy 角，其长为 l。求绳子 OA 的张力 T。

解： 为了照常能利用虚功原理求得绳子的张力 T，我们把绳子 OA 的约束去掉，代之为绳子的张力 T。只不过，此时把绳子的张力 T 也视为主动力。

若选图1.27所示的坐标系，那么等边三角形 ABC 的重心 G 在 z 轴的坐标为

$$z_G=\overline{GF}=\overline{AG}\sin\alpha$$

由题给条件可得

$$\overline{B'E}=\overline{EC'}=\overline{BD}=\overline{DC}=\frac{a}{2}$$

图1.27

$$\angle B'OE=\angle EOC'=\angle BO'D=\angle DO'C=45^\circ$$

式中 B'，E，C' 分别表示 B、D 与 C 点的垂足。又因为$\overline{O'D}\perp\overline{BC}$，$\overline{OE}\perp\overline{B'C'}$，$\overline{OA}=l$，故在 $rt\Delta BDO'$ 与 $rt\Delta B'EO$ 中有

$$\overline{O'D}=\overline{OE}=\frac{a}{2}$$

于是 $\quad \overline{EA}=\overline{OA}-\overline{OE}=l-\dfrac{a}{2}$

又在 $rt\Delta AED$ 中，由于 $\overline{AD}=\sqrt{a^2-\left(\dfrac{a}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$

$$\overline{AG}=\frac{2}{3}\overline{AD}=\frac{\sqrt{3}}{3}a$$

所以 $\quad z_a=\overline{GF}=\overline{AG}\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{3}a\sin\alpha$

又从图示可得

$$\sin\alpha=\frac{\sqrt{\overline{AD}^2-\overline{AE}^2}}{\overline{AD}}=\frac{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2-\left(l-\frac{a}{2}\right)^2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}a}=\frac{\sqrt{2(a^2+2al-2l^2)}}{\sqrt{3}\,a}$$

$$\cos\alpha=\frac{\overline{EA}}{\overline{AD}}=\frac{\left(l-\frac{a}{2}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}a}=\frac{2l-a}{\sqrt{3}\,a}$$

因此 $\quad \delta z_a=\dfrac{\sqrt{3}}{3}a\cos\alpha\,\delta\alpha$

$$-\sin\alpha\delta\alpha=\frac{2}{\sqrt{3}a}\delta l$$

显然，此系统具有一个自由度，故选 α 为相应的广义坐标。于是，由虚动原理得

$$-P\delta z_G-T\delta l=0$$

把上述的 δz_G 与 δl 的数值代入上式便得

$$-P\frac{\sqrt{3}}{3}a\cos\alpha\delta\alpha+T\frac{\sqrt{3}}{2}a\sin\alpha\delta\alpha=0$$

即 $$\left(-\frac{P}{3}\cos\alpha+\frac{T}{2}\sin\alpha\right)\sqrt{3}\,a\delta\alpha=0$$

由于 α 为广义坐标，所以 $\delta\alpha$ 为任意的，故有

$$-\frac{P}{3}\cos\alpha+\frac{T}{2}\sin\alpha=0$$

即 $$T=\frac{2}{3}\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\cdot P$$

$$=\frac{2P}{3}\cdot\frac{\dfrac{2l-a}{\sqrt{3}a}}{\dfrac{\sqrt{2(a^2+2al-2l^2)}}{\sqrt{3}a}}$$

$$=\frac{P}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}(2l-a)}{\sqrt{a^2+2al-2l^2}}$$

例23. 一轻三足架每足的长度等于 l，每足都与铅垂线成同一角度 θ，三足置于一光滑水平面上，且恒成一等边三角形，今用一绳圈套在三足架的三足上，使其不能改变与铅垂线间的夹角。设三足架及其所负的重量为 Q，求绳子的张力 T。

解： 为了照样能利用虚功原理求得绳子的张力 T，我们把绳子约束去掉，代之为绳子的张力 T。只不过，此时把张力 T 也视为主动力。

若选如图1.28所示的坐标系，那么 A 点的横坐标为

$$x_A=l\sin\theta$$

D 点的纵坐标为

$$y_D=l\cos\theta$$

故有 $$\delta x_A=l\cos\theta\delta\theta$$

$$\delta y_D=-l\sin\theta\delta\theta$$

显然，此系统具有一个自由度，故选 θ 为相应的广义坐标。

由于一个系统处于平衡状态时就意味着组成该系统的每一个物体都达到平衡。因此我们对 AD 杆利用虚功原理便得

$$-\frac{1}{3}Q\delta y_D-2T\cos30°\cdot\delta x_A=0$$

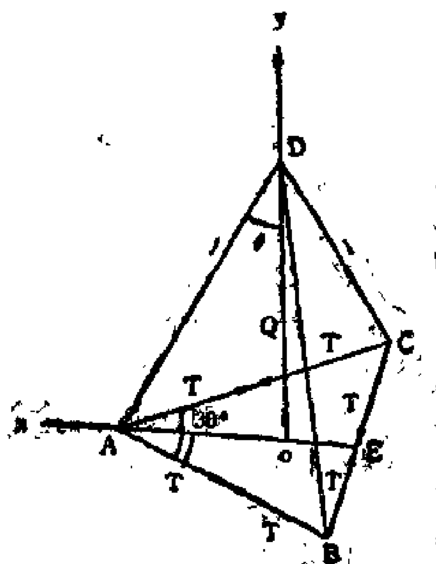


图 1.23

即 $$\frac{1}{3}Ql\sin\theta\delta\theta-2T\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}l\cos\theta\delta\theta=0$$

或 $$\left(\frac{1}{3}Q\sin\theta-\sqrt{3}T\cos\theta\right)l\delta\theta=0$$

由于θ为广义坐标，所以$\delta\theta$为任意，故有

$$\frac{1}{3}Q\sin\theta-\sqrt{3}T\cos\theta=0$$

即 $$T=\frac{Q\text{tg}\theta}{3\sqrt{3}}$$

当然，此题也可以整体考虑问题。设等边三角形ABC边长为S，那么由等边三角形的性质得

$$\overline{AO}=\frac{2}{3}\overline{AE}$$

又 $$\overline{AO}=l\sin\theta$$

故有 $$\overline{AE}=\frac{3}{2}l\sin\theta$$

于是 $$S=AB=\frac{\overline{AE}}{\cos30^\circ}=\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{3}{2}l\sin\theta=\sqrt{3}l\sin\theta$$

进而 $$\delta S=\sqrt{3}l\cos\theta\delta\theta$$

由虚功原理得

$$-Q\delta y_D-3T\delta S=0$$

把δy_D与δS的表式代入上式则得

$$-Q(-l\sin\theta\delta\theta)-3T\cdot\sqrt{3}l\cos\theta\delta\theta=0$$

或者 $$[Q\sin\theta-3\sqrt{3}T\cos\theta]l\delta\theta=0$$

由于θ为广义坐标，所以$\delta\theta$为任意的。故有

$$Q\sin\theta-3\sqrt{3}T\cos\theta=0$$

即 $$T=\frac{Q\text{tg}\theta}{3\sqrt{3}}$$

例24。有一长为$2a$、重为P的梯子AB，它的两端分别靠在垂直的墙和水平的地板上。A点摩擦系数为0.4，B点的摩擦系数为0.5，假定梯子的重心在其中点，求梯子平衡的时候，它与墙所成的角度α。

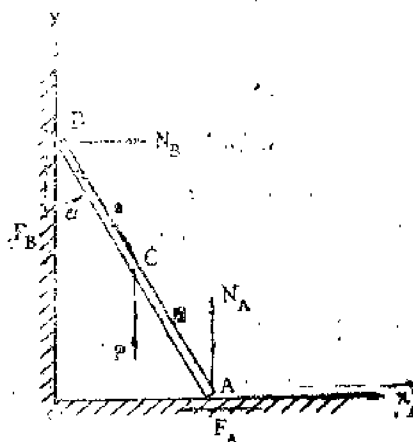


图1.29

解：选如图1.29所示的坐标系，那么A点坐标为

$$x_A=2a\sin\alpha,\quad y_A=0$$

B点的坐标为

$$x_B=0,\quad y_B=2a\cos\alpha$$

C 点的坐标为

$$x_C = a\sin\alpha, \quad y_C = a\cos\alpha$$

故有 $\delta x_A = 2a\cos\alpha\delta\alpha$

$$\delta y_B = -2a\sin\alpha\delta\alpha$$

$$\delta y_C = -a\sin\alpha\delta\alpha$$

显然，此系统具有一个自由度，故选 α 为相应的广义坐标。于是，由虚功原理得

$$-P\delta y_C + F_B\delta y_B - F_A\delta x_A = 0$$

式中 F_A 与 F_B 分别表示 A 点与 B 点的摩擦力。把 δx_A 和 δy_B 以及 δy_C 的表式代入上式便可得

$$(Pa\sin\alpha - 2F_B a\sin\alpha - 2F_A a\cos\alpha)\delta\alpha = 0$$

由于 α 为广义坐标，所以 $\delta\alpha$ 为任意的。故有

$$P\sin\alpha - 2F_B\sin\alpha - 2F_A\cos\alpha = 0 \qquad (1)$$

又由静力学得

$$F_A = \mu_A N_A, \qquad F_B = \mu_B N_B \qquad (2)$$

$$N_A + F_B = P \qquad (3)$$

$$N_B = F_A \qquad (4)$$

上述式子中，N_A、N_B 分别表示 A 点与 B 点处的约束力，μ_A 与 μ_B 则表示 A 点与 B 点处的摩擦系数。于是，联立（2）式、（3）式和（4）式便得

$$N_A = \frac{P}{1+\mu_A\mu_B} \qquad (5)$$

$$N_B = \frac{\mu_A P}{1+\mu_A\mu_B} \qquad (6)$$

把（2）式、（5）式、（6）式同时代入（1）式得

$$P\sin\alpha - \frac{2\mu_A\mu_B\sin\alpha}{1+\mu_A\mu_B}P - \frac{2\mu_A\cos\alpha}{1+\mu_A\mu_B}P = 0$$

即 $$\frac{\sin\alpha - \mu_A\mu_B\sin\alpha - 2\mu_A\cos\alpha}{1+\mu_A\mu_B} = 0$$

由于 $1+\mu_A\mu_B \neq 0$ 所以 $(1-\mu_A\mu_B)\sin\alpha - 2\mu_A\cos\alpha = 0$

或者 $$\text{tg}\alpha = \frac{2\mu_A}{1-\mu_A\mu_B}$$

当 $\mu_A = 0.4$，$\mu_B = 0.5$ 时，$\alpha = 45°$。由于上述解题过程中，考虑梯子平衡时，是把梯子与墙所成的角度 α 视为最大的情形，因此，梯子平衡时，$0 \leqslant \alpha \leqslant 45°$

三、拉格朗日不定乘子与约束力

现在，应用拉格朗日的不定乘子的方法来确定质点（或质点组）的平衡位置和计算其约束力。

1. 质点在曲面上的平衡

设质点约束在曲面上，其约束方程为

$$f(x,\ y,\ z)=0 \tag{1.13}$$

即 $$\delta f=\frac{\partial f}{\partial x}\delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\delta y+\frac{\partial f}{\partial z}\delta z=0 \tag{1.14}$$

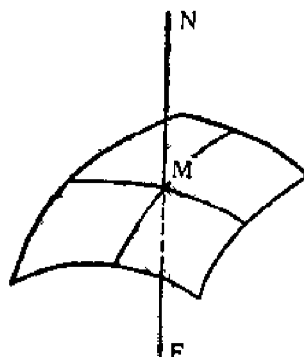


图1.30

若作用在质点上的主动力为 $\mathbf{F}=X\mathbf{i}+Y\mathbf{j}+Z\mathbf{k}$

其虚位移为 $\delta\mathbf{r}=\delta x\mathbf{i}+\delta y\mathbf{j}+\delta z\mathbf{k}$

则由虚功原理得其平衡条件

$$X\delta x+Y\delta y+Z\delta z=0 \tag{1.15}$$

上式中 δx 与 δy 以及 δz 必须满足方程（1.14）式，因而三个虚位移中只有两个是彼此独立的（不妨假设 δx 与 δy 为任意的）。现在的问题是如何联立（1.14）与（1.15）式而求得质点的平衡位置。

将（1.14）式乘上不定乘子 λ，而后与（1.15）式相加得

$$\left(X+\lambda\frac{\partial f}{\partial x}\right)\delta x+\left(Y+\lambda\frac{\partial f}{\partial y}\right)\delta y+\left(Z+\lambda\frac{\partial f}{\partial z}\right)\delta z=0 \tag{1.16}$$

适当选取 λ 值，使得

$$Z+\lambda\frac{\partial f}{\partial z}=0 \tag{1.17}$$

于是，方程式（1.16）就变为

$$\left(X+\lambda\frac{\partial f}{\partial x}\right)\delta x+\left(Y+\lambda\frac{\partial f}{\partial y}\right)\delta y=0$$

由于 δx，δy 是彼此独立的（前面已假设 δx，δy 为任意的），故有

$$X+\lambda\frac{\partial f}{\partial x}=0 \tag{1.18}$$

$$Y+\lambda\frac{\partial f}{\partial y}=0 \tag{1.19}$$

联立方程式（1.13）、（1.17）、（1.18）以及（1.19），可以解得不定乘子 λ 和质点的平衡位置 x、y、z。

现在，进一步讨论不定乘子 λ 的物理意义：将平衡方程（1.18）、（1.19）及（1.17）分别乘上 $\mathbf{i}$，$\mathbf{j}$，$\mathbf{k}$，而后相加便得

$$X\mathbf{i}+Y\mathbf{j}+Z\mathbf{k}+\lambda\left(\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}\right)=0$$

或者 $$\mathbf{F}+\lambda\nabla f=0 \tag{1.20}$$

将上式与平衡方程

$$\mathbf{F}+\mathbf{N}=0$$

相比较便得 $\mathbf{N}=\lambda\nabla f$

式中 $\mathbf{N}$ 是曲面上法向的约束力，因此得

$$\lambda = \frac{N}{|\nabla f|} = \frac{N}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}} \tag{1.21}$$

上式表明，拉格朗日不定乘子λ是与约束力N成比例的标量。

例 1. 重为P的物体A放在倾斜角为α的斜面上。物体上系一与斜面平行并绕过滑轮B的线，线的另一端系一盛砝码的盘，在物体开始沿斜面向上移动时，盘上砝码重为Q，求物体对平面的摩擦系数。

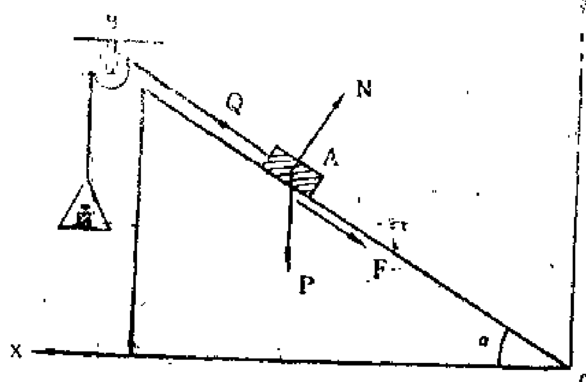


图1.31

解： 由虚功原理得物体的平衡条件为

$$(Q\cos\alpha - F\cos\alpha)\delta x + (Q\sin\alpha - F\sin\alpha - P)\delta y = 0$$

其约束方程为

$$f = y - x\,\mathrm{tg}\alpha = 0$$

对上述方程取等时变分得 $\delta y - \mathrm{tg}\alpha\,\delta x = 0$

将上式乘上λ并与平衡方程相加便得

$$[(Q\cos\alpha - F\cos\alpha) - \lambda\,\mathrm{tg}\alpha]\delta x + (Q\sin\alpha - F\sin\alpha - P + \lambda)\delta y = 0$$

于是，得到平衡方程组

$$\begin{cases} Q\cos\alpha - F\cos\alpha - \lambda\,\mathrm{tg}\alpha = 0 & (1) \\ Q\sin\alpha - F\sin\alpha - P + \lambda = 0 & (2) \end{cases}$$

由（2）式得

$$\lambda = P + (F - Q)\sin\alpha \tag{3}$$

将（3）式代入（1）式即得

$$(Q - F)\cos\alpha - [P + (F - Q)\sin\alpha]\,\mathrm{tg}\alpha = 0$$

展开上式便可得到

$$F = Q - P\sin\alpha \tag{4}$$

由于 $\frac{\partial f}{\partial x} = -\mathrm{tg}\alpha$，$\frac{\partial f}{\partial y} = 1$ 故有

$$\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{1 + \mathrm{tg}^2\alpha} = \sec\alpha$$

于是由（1.21）式得

$$N=\lambda\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}=[P+(F-Q)\sin\alpha]\sec\alpha \tag{5}$$

把（4）式代入（5）式得

$$N=P(1-\sin^2\alpha)\cdot\frac{1}{\cos\alpha}=P\cos\alpha \tag{6}$$

又由静力学得 $F=\mu N$ （7）

把（4）式与（6）式同时代入（7）式便得

$$\mu=\frac{Q-P\sin\alpha}{P\cos\alpha}$$

例2. 无重质点M穿在半园钢丝AMB上，此点受A、B两点的吸引，引力的值与距离成正比，而比例常数皆为k，如半园之半径为r，求平衡位置。

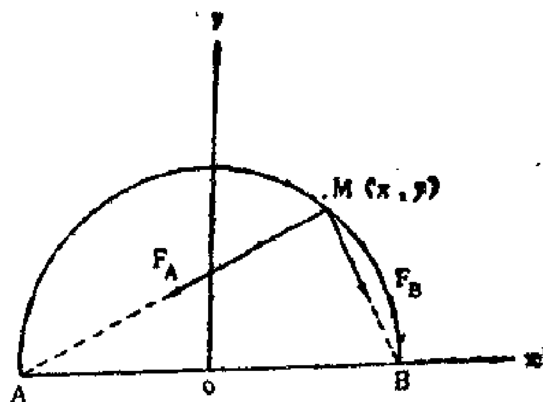


图1.32

解：设质点M受A点的吸引力为$\mathbf{F}_A$，受B点的吸引力为$\mathbf{F}_B$。

由题给条件得

$$\begin{cases}F_{Ax}=-k(r+x)\\F_{Ay}=-ky\end{cases}$$

$$\begin{cases}F_{Bx}=k(r-x)\\F_{By}=-ky\end{cases}$$

而约束方程为

$$f=x^2+y^2-r^2=0 \tag{1}$$

对上式取等时变分得

$$\delta f=2x\delta x+2y\delta y=0 \tag{2}$$

由虚功原理得质点M的平衡方程为

$$(F_{Ax}+F_{Bx})\delta x+(F_{Ay}+F_{By})\delta y=0$$

即 $$-kx\delta x-ky\delta y=0 \tag{3}$$

（2）式乘上λ而后与（3）式相加即得

$$(\lambda-k)x\delta x+(\lambda-k)y\delta y=0$$

于是得到 $$\begin{cases}(\lambda-k)x=0\\(\lambda-k)y=0\end{cases} \tag{4}$$

联立方程（1）式与（4）式解得$\lambda=k$，而x，y为任意的。于是，约束力为

$$N=\lambda\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}=k\sqrt{4(x^2+y^2)}=2kr$$

因此，M点对钢丝的压力为$2kr$，而质点在半园上任意点都能平衡。

2. 质点在曲线上的平衡

设质点M约束在曲线上（可视为两个曲面的交线），其约束方程为

$$\begin{cases} f_1(x,y,z)=0 \\ f_2(x,y,z)=0 \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} \delta f_1 = \dfrac{\partial f_1}{\partial x}\delta x + \dfrac{\partial f_1}{\partial y}\delta y + \dfrac{\partial f_1}{\partial z}\delta z = 0 \\ \delta f_2 = \dfrac{\partial f_2}{\partial x}\delta x + \dfrac{\partial f_2}{\partial y}\delta y + \dfrac{\partial f_2}{\partial z}\delta z = 0 \end{cases} \tag{1.22}$$

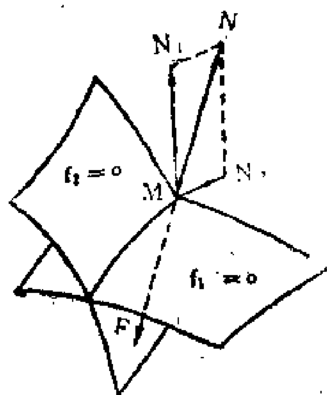


图1.33

若作用在质点上的主动力为

$$\mathbf{F} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k}$$

其虚位移为

$$\delta\mathbf{r} = \delta x\mathbf{i} + \delta y\mathbf{j} + \delta z\mathbf{k}$$

则由虚功原理得其平衡条件为

$$X\delta x + Y\delta y + Z\delta z = 0 \tag{1.23}$$

上式中 δx 与 δy 以及 δz 必须满足方程（1.22），因而三个虚位移中，只有一个是独立的（不妨假设 δz 为任意的）。我们现在的问题是如何联立（1.22）与（1.23）式而求得质点的平衡位置。

将（1.22）式分别乘上 λ_1 与 λ_2，然后与（1.23）式相加便得

$$\left(X + \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)\delta x + \left(Y + \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)\delta y +$$

$$\left(Z + \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial z}\right)\delta z = 0$$

我们可以适当选择 λ_1 与 λ_2 使得

$$X + \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial x} = 0 \tag{1.24}$$

$$Y + \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial y} = 0 \tag{1.25}$$

由于我们前面事先假设 δz 为任意的（即独立的），故有

$$Z + \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial z} = 0 \tag{1.26}$$

联立（1.24）式与（1.25）式以及（1.26）式和约束方程，便可求得 λ_1 与 λ_2 以及质点的平衡位置 x，y，z。

为了进一步讨论 λ_1 与 λ_2 的物理意义，我们将方程（1.24）式、（1.25）式以及（1.26）分别乘上 $\mathbf{i}$，$\mathbf{j}$，$\mathbf{k}$ 而后相加即得

$$\mathbf{F} + \lambda_1\nabla f_1 + \lambda_2\nabla f_2 = 0$$

与平衡条件 $\quad \mathbf{F} + \mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_2 = 0$

相比较便得

$$\mathbf{N}_1 = \lambda_1\nabla f_1, \qquad \mathbf{N}_2 = \lambda_2\nabla f_2 \tag{1.27}$$

上式中 $\mathbf{N}_1$ 与 $\mathbf{N}_2$ 分别表示曲面 $f_1(x, y, z) = 0$ 与曲面 $f_2(x, y, z) = 0$ 的法向约束力。于是

$$\lambda_1 = -\frac{N_1}{\sqrt{\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f_1}{\partial z}\right)^2}}$$

$$\lambda_2 = -\frac{N_2}{\sqrt{\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f_2}{\partial z}\right)^2}}$$

3. 质点组的平衡

设质点组由N个质点所组成，受m个约束，其约束方程为

$$f_s(x_k,\ y_k,\ z_k)=0 \qquad (s=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ m) \qquad (k=1,\ 2,\ \cdots,\ N)$$

于是

$$\delta f_s=\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{\partial f_s}{\partial x_k}\delta x_k+\frac{\partial f_s}{\partial y_k}\delta y_k+\frac{\partial f_s}{\partial z_k}\delta z_k\right)=0 \qquad (s=1,\ 2,\ 3\cdots\cdots,\ m)$$

（1.28）

若作用在第k个质点上的主动力为

$$\mathbf{F}_k=X_k\mathbf{i}+Y_k\mathbf{j}+Z_k\mathbf{k}$$

而虚位移为

$$\delta\mathbf{r}_k=\delta x_k\mathbf{i}+\delta y_k\mathbf{j}+\delta z_k\mathbf{k}$$

由虚功原理得质点组的平衡条件为

$$\sum_{k=1}^{N}(X_k\delta x_k+Y_k\delta y_k+Z_k\delta z_k)=0 \qquad (1.29)$$

上式中$\delta x,\delta y,\delta z$必须满足方程(1.28)，因而$3N$个虚位移中只有（$3N-m$）个是独立的。

将（1.28）各式中乘上λ_s，然后与（1.29）式相加即得

$$\sum_{k=1}^{N}\left[\left(X_k+\sum_{s=1}^{m}\lambda_s\frac{\partial f_s}{\partial x_k}\right)\delta x_k+\left(Y_k+\sum_{s=1}^{m}\lambda_s\frac{\partial f_s}{\partial y_k}\right)\delta y_k+\right.$$

$$\left.+\left(Z_k+\sum_{s=1}^{m}\lambda_s\frac{\partial f_s}{\partial z_k}\right)\delta z_k\right]=0$$

我们可以适当地选择m个λ_s，使得上式中m个不独立的虚位移前的系数为零。而（$3N-m$）个彼此独立的虚位移前的系数也当然为零。于是，得到$3N$个方程的方程组

$$\begin{cases} X_k+\sum_{s=1}^{m}\lambda_s\frac{\partial f_s}{\partial x_k}=0 \\ Y_k+\sum_{s=1}^{m}\lambda_s\frac{\partial f_s}{\partial y_k}=0 \qquad (k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ N) \\ Z_k+\sum_{s=1}^{m}\lambda_s\frac{\partial f_s}{\partial z_k}=0 \end{cases} \qquad (1.30)$$

联立约束方程与（1.30）方程组，便可解得 x_k、y_k、z_k、λ_s 共（$3N+m$）个未知量。即可确定出拉格朗日不定乘子与质点组的平衡位置。至于约束力 N_k 可由如下式子求得

$$\mathrm{N}_k=\sum_{s=1}^{m}\lambda_s\nabla_k f_s \qquad (k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ N)$$

式中 $\nabla_k=\frac{\partial}{\partial x_k}\mathbf{i}+\frac{\partial}{\partial y_k}\mathbf{j}+\frac{\partial}{\partial z_k}\mathbf{k}$

从上述处理方法的过程中可看出，拉格朗日不定乘子法在理论上是有很大价值的。可是，在实用中，遇到那些质点数目与约束数目较多的情况时，解这些代数方程组将会感到很大的麻烦。

四、在广义坐标系中的虚功原理——平衡条件

设一质点组是由 N 个质点所组成，受 m 个稳定理想的约束，其约束方程为

$$f_s(x_k,\ y_k,\ z_k)=0 \qquad (s=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ m)$$

于是，广义坐标的数目为（$3N-m$）$=n$ 个，从而笛卡尔坐标 x_k，y_k，z_k 可表示为这 n 个广义坐标 q_1，q_2，q_3，$\cdots\cdots$，q_n 的函数。

$$\begin{cases} x_k=x_k(q_1,\ q_2,\ \cdots,\ q_n) \\ y_k=y_k(q_1,\ q_2,\ \cdots,\ q_n) \\ z_k=z_k(q_1,\ q_2,\ \cdots,\ q_n) \end{cases} \qquad (k=1,\ 2,\ \cdots,\ N)$$

因此

$$\begin{cases} \delta x_k=\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial x_k}{\partial q_l}\delta q_l \\ \delta y_k=\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial y_k}{\partial q_l}\delta q_l \\ \delta z_k=\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial z_k}{\partial q_l}\delta q_l \end{cases} \qquad (k=1,2,3,\cdots,N)$$

由虚功原理得

$$\sum_{k=1}^{N}\left[\left(X_k\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial x_k}{\partial q_l}\delta q_l\right)+\left(Y_k\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial y_k}{\partial q_l}\delta q_l\right)+\left(Z_k\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial z_k}{\partial q_l}\delta q_l\right)\right]=0$$

交换对 l 求和与对 k 求和的次序即得

$$\sum_{l=1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{N}\left(X_k\frac{\partial x_k}{\partial q_l}+Y_k\frac{\partial y_k}{\partial q_l}+Z_k\frac{\partial z_k}{\partial q_l}\right)\right]\delta q_l=0$$

令 $$Q_i=\sum_{k=1}^{N}\left(X_k\frac{\partial x_k}{\partial q_i}+Y_k\frac{\partial y_k}{\partial q_i}+z_k\frac{\partial z_k}{\partial q_i}\right)\quad (i=1,2,3,\cdots,n) \tag{1.31}$$

并称 Q_i 为关于广义坐标 q_i 的广义力。于是，上述的虚功原理又可表示为

$$\sum_{i=1}^{n}Q_i\,\delta q_i=0 \tag{1.32}$$

由于 q_i 为广义坐标，所以 δq_i 是彼此独立的。因此，便得

$$Q_i=0\qquad (i=1,2,3,\cdots,n) \tag{1.33}$$

从而在广义坐标系中虚功原理可以表述为：具有稳定理想约束的质点组其平衡的必要且充分的条件为所有的广义力等于零。

如果作用在质点组上的主动力具有势，即

$$X_k=-\frac{\partial V}{\partial x_k},\quad Y_k=-\frac{\partial V}{\partial y_k},\quad Z_k=-\frac{\partial V}{\partial z_k}\quad (k=1,2,\cdots,N)$$

那么虚功原理可表示为

$$-\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{\partial V}{\partial x_k}\delta x_k+\frac{\partial V}{\partial y_k}\delta y_k+\frac{\partial V}{\partial z_k}\delta z_k\right)=0$$

即 $$\delta V=0 \tag{1.34}$$

上式表明，保守的质点组，其平衡的必要且充分的条件为势能的变分等于零。由于保守组的广义力可表为

$$Q_i=-\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{\partial V}{\partial x_k}\cdot\frac{\partial x_k}{\partial q_i}+\frac{\partial V}{\partial y_k}\cdot\frac{\partial y_k}{\partial q_i}+\frac{\partial V}{\partial z_k}\cdot\frac{\partial z_k}{\partial q_i}\right)=-\frac{\partial V}{\partial q_i}$$

所以（1.33）式又可表示为

$$\frac{\partial V}{\partial q_i}=0\qquad (i=1,2,3,\cdots,n) \tag{1.35}$$

因此，在广义坐标系中，具有稳定理想约束的保守质点组，其平衡的必要且充分的条件是势能具有极值。

我们知道，质点组在平衡位置上处于平衡状态有三种情况：

（i）稳定平衡：势能 V 在平衡位置上取极小值。

（ii）不稳定平衡：势能 V 在平衡位置上取极大值。

（iii）随遇平衡：势能 V 为常量。

因此（1.35）式只能确定质点组的平衡位置，而无法确定其平衡状态的具体情况。稳定与否还依赖于极值的性质。下面我们举两个例子来加以说明。

例1 一固定园柱体半径为 r，其轴为水平，在其上放置另一半径为 r_1 的均匀园柱体，其轴亦为水平，且与第一园柱体的轴垂直。问此系统为何种平衡：随遇、稳定或不稳定？

解：设开始时 A 与 B 重合（即 $\theta=0$），由于是粗糙接触，所以当 θ 从 $\theta=0$ 到 $\theta=\theta$

时，r_1园柱与r园柱无相对滑动．故有

$$\overline{DB}=\widehat{DA}=r\theta$$

若选固定园柱中心O为系统势能的参考点并设r_1园柱质量为m时，那么半径为r_1园柱的的势能为

$$V=mg\cdot\overline{CF}$$

而由图 1.34 所示可得

$$\overline{CF}=\overline{CP}+\overline{PF}=\overline{CP}+\overline{EG}$$
$$\overline{EC}=\overline{DB}$$

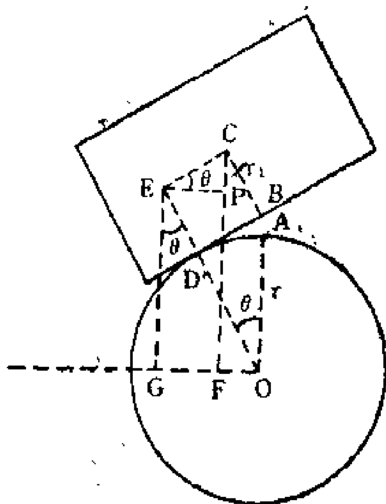


图 1.34

故r_1园柱的势能又可表示为

$$V=mg\cdot(\overline{CP}+\overline{EG})$$
$$=mg[\overline{EC}\cdot\sin\theta+(r_1+r)\cos\theta]$$
$$=mg[\overline{DB}\cdot\sin\theta+(r_1+r)\cos\theta]$$
$$=mg[r\theta\sin\theta+(r_1+r)\cos\theta]$$

显然，此系统具有一个自由度，故选θ为广义坐标．于是

$$\frac{\partial V}{\partial\theta}=mg[r\sin\theta+r\theta\cos\theta-(r_1+r)\sin\theta]=mg[r\theta\cos\theta-r_1\sin\theta]$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2}=mg[r\cos\theta-r\theta\sin\theta-r_1\cos\theta]=mg[(r-r_1)\cos\theta-r\theta\sin\theta]$$

故由$\frac{\partial V}{\partial\theta}=0$得$\theta=0$为系统的平衡位置．因此，当：

i．$\theta=0$，$r_1<r$时，$\frac{\partial V}{\partial\theta}=0$，$\frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2}=mg(r-r_1)>0$此时$V=mg(r_1+r)$为极小值，故半径为$r_1$的园柱在$\theta=0$处为稳定平衡．

ii．$\theta=0$，$r_1>r$时，$\frac{\partial V}{\partial\theta}=0$，$\frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2}=mg(r-r_1)<0$此时$V=mg(r_1+r)$为极大值，故半径为$r_1$的园柱在$\theta=0$处为不稳定平衡．

iii．$\theta=0$，$r_1=r$时，$\frac{\partial V}{\partial\theta}=0$，$\frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2}=mg(r-r_1)=0$此时$V=mg(2r)$仍大于极小值，故半径为$r_1$的园柱在$\theta=0$处还是不稳定平衡．

例2　一个半径为a的实心均质的半球静止放在一个半径为b的粗糙的半球冠上．它们以曲面相接触．如果a是小于$(3/5)\,b$时，试证半球的平衡是稳定的．

证：设$\angle BOQ=\theta$，$\angle BOO'=\alpha$，$\angle O'OQ=\angle OO'P=\beta$

开始时$\theta=0$，A、B、P三点重合．由于半球O与半球冠O'是粗糙接触，所以当θ由$\theta=0$到$\theta=\theta$时，半球O与半球冠O'没有相对滑动．因此，$\widehat{AB}=\widehat{AP}$，即$a\alpha=b\beta$或

$\alpha=\dfrac{b}{a}\beta$，又由图示得知：$\theta=\alpha+\beta=\left(\dfrac{a+b}{a}\right)\beta$

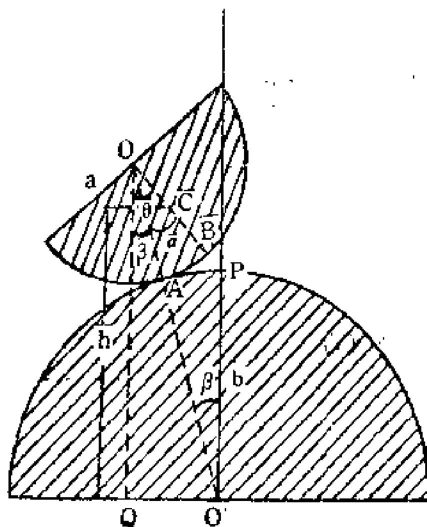


图 1.35

故有 $\beta=\dfrac{a}{a+b}\theta$

若选过$O'Q$的水平面为势能的参考面并设O半球的质量为m时，那么半球O的势能为

$$
\begin{aligned}
V&=mgh\\
&=mg(\overline{OQ}-\overline{OC}\cos\theta)\\
&=mg\left(\overline{OO'}\cos\beta-\frac{3a}{8}\cos\theta\right)\\
&=mg\left[(a+b)\cos\left(\frac{a}{a+b}\theta\right)-\frac{3a}{8}\cos\theta\right].
\end{aligned}
$$

显然，此系统具有一个自由度，故选θ为广义坐标。于是

$$\frac{\partial V}{\partial\theta}=mg\left[-a\sin\left(\frac{a}{a+b}\theta\right)+\frac{3}{8}a\sin\theta\right]$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2}=mg\left[-\frac{a^2}{a+b}\cos\left(\frac{a}{a+b}\theta\right)+\frac{3}{8}a\cos\theta\right]$$

故由 $\dfrac{\partial V}{\partial\theta}=0$ 得 $\theta=0$ 为系统的平衡位置。因此，当 $\theta=0$，$a<\dfrac{3}{5}b$ 时：

$$\frac{\partial V}{\partial\theta}=0$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2}=mg\cdot\frac{5a}{8(a+b)}\cdot\left(\frac{3}{5}b-a\right)>0$$

此时 $V=mg\left(\dfrac{5}{8}a+b\right)$为极小值，于是，半球$O$在$\theta=0$处（即平衡位置）的平衡为稳定的平衡。

§1-4 达朗伯原理与动力学的普遍方程

达朗伯原理是关于非自由质点动力学的一个原理．下面我们分别介绍一个质点的达朗伯原理、质点组的达朗伯原理以及系统的动力学的普遍方程．

一、一个质点的达朗伯原理

设作用在非自由质点上有主动力**F**和约束力 N，那么由牛顿第二定律得

$$\mathbf{F}+\mathbf{N}=m\mathbf{a} \tag{1.36}$$

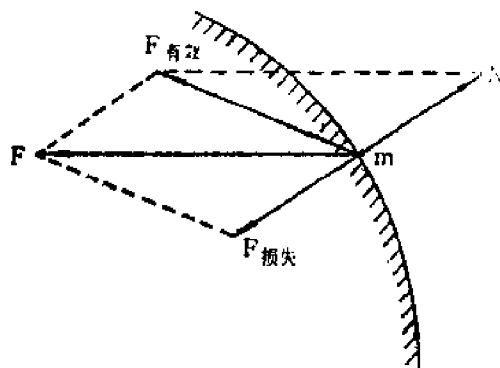


图 1.36

若将**F**分解为两部份（图 1.36）：一部份是使质点产生加速度 **a**，即改变质点的运动状态的力，称为有效力$\mathbf{F}_{有效}$，则有

$$\mathbf{F}_{有效}=m\mathbf{a}$$

另一部份对改变质点的运动状态是不起作用的力，称为损失力 $\mathbf{F}_{损失}$，则有

$$\mathbf{F}_{损失}=\mathbf{F}-m\mathbf{a} \tag{1.37}$$

由（1.36）、（1.37）式显而易得

$$\mathbf{F}_{损失}+\mathbf{N}=0 \tag{1.38}$$

上式表明，作用在质点上的损失力在每一瞬时位置上都为约束力所平衡．若把$(-m\mathbf{a})$称为惯性力 $\mathbf{F}_{惯}$（即达朗伯惯性力）时，那么非自由质点的达朗伯原理可表述为：作用在质点上的主动力与达朗伯惯性力，在每一瞬时位置上都为约束力所平衡．即

$$\mathbf{F}+(-m\mathbf{a})+\mathbf{N}=0 \tag{1.39}$$

因此，如果引进了假想的达朗伯惯性力后，那么根据达朗伯原理，静力学中的所有平衡方程式和平衡条件均可应用于动力学问题．也即，达朗伯原理提供了一种用静力学的方法写出物体动力学方程式的简单明了的手段．但这并非说明，可把动力学归结为静力学的问题．

二、质点组的达朗伯原理

若质点组是由N个质点所组成，那么我们先研究第k个质点的情况．设作用在第k个质点上的所有主动力为$\mathbf{F}_k$（包括外力和内力），约束力为 $\mathbf{N}_k$，其加速度为 $\mathbf{a}_k$，那

么根据方程（1.39）得

$$\mathbf{F}_k+(-m_k\mathbf{a}_k)+\mathbf{N}_k=0 \qquad (k=1,2,3,\cdots,N) \tag{1.40}$$

由于上式是适用于该质点组的所有质点，因此我们得到了**质点组的达朗伯原理：作用在质点组的每一质点上的主动力与达朗伯惯性力于每一瞬时位置上都为约束力所平衡。**

若将（1.40）式中每一项对 k 求和便得

$$\sum_{k=1}^{N}\mathbf{F}_k+\sum_{k=1}^{N}(-m_k\mathbf{a}_k)+\sum_{k=1}^{N}\mathbf{N}_k=0 \tag{1.41}$$

再将（1.40）式中每一项矢乘$\mathbf{r}_k$，而后对 k 求和又得

$$\sum_{k=1}^{N}\mathbf{r}_k\times\mathbf{F}_k+\sum_{k=1}^{N}(-\mathbf{r}_k\times m_k\mathbf{a}_k)+\sum_{k=1}^{N}\mathbf{r}_k\times\mathbf{N}_k=0 \tag{1.42}$$

（1.41）与（1.42）式表明，在每一瞬时位置，作用在质点组上的主动力、达朗伯惯性力与约束力是满足静力学的基本方程的．也即所有这些力之和以及所有这些力对任一中心的力距之和等于零。

三、系统动力学的普遍方程(即达朗伯——拉格朗日方程)

如果我们把达朗伯原理和虚功原理结合起来，并把达朗伯惯性力也当作在某一瞬时作用在质点组上的主动力时，则有

$$\sum_{k=1}^{N}\mathbf{F}_k\cdot\delta\mathbf{r}_k+\sum_{k=1}^{N}\mathbf{N}_k\cdot\delta\mathbf{r}_k+\sum_{k=1}^{N}(-m_k\mathbf{a}_k\cdot\delta\mathbf{r}_k)=0$$

由于质点组所受的约束为稳定理想的约束，并用 $\ddot{\mathbf{r}}_k$ 表示 $\mathbf{a}_k$，所以上述式子又可表示为

$$\sum_{k=1}^{N}(\mathbf{F}_k-m_k\ddot{\mathbf{r}}_k)\cdot\delta\mathbf{r}_k=0 \tag{1.43}$$

此式称为**达朗伯——拉格朗日方程式**．由于通过它可以推导出以前曾经建立过的动力学的所有基本定理，因此（1.43）式也称为动力学的普遍方程。

下面我们举几个例子来说明如何应用达朗伯原理去解决实际问题。

例1 重物 A 与 B 各重 P 与 Q，用一通过无重滑轮之绳连结．此二物体可沿固定三棱柱面滑动，其摩擦系数为 μ．如角 α 及 β 已知．求重物的加速度 a．

解： 由于联结重物 A 与 B 的绳子是理想绳子(即不可伸缩)，滑轮又无重，故两重物将以同一加速度a运动．由图1.37所示可得：作用在重物A上的摩擦力为 $f_1=\mu N_1=\mu P\cos\alpha$；作用在重物 B 上的摩擦力为 $f_2=\mu N_2=\mu Q\cos\beta$。于是，对整个系统应用达朗伯原理得

$$P\sin\alpha-\frac{P}{g}a-\mu P\cos\alpha-Q\sin\beta-\mu Q\cos\beta-\frac{Q}{g}a=0$$

即 $$P(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)-Q(\sin\beta+\mu\cos\beta)=\frac{P+Q}{g}\cdot a$$

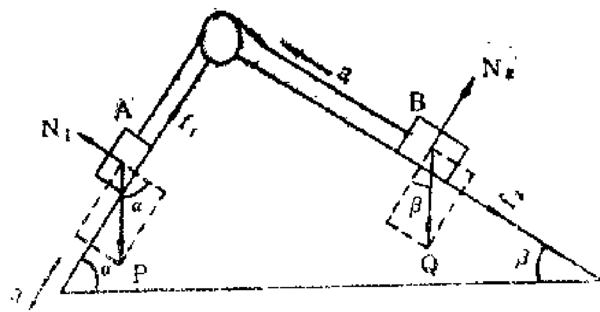


图 1.37

故得 $$a=\frac{P(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)-Q(\sin\beta+\mu\cos\beta)}{P+Q}g$$

例2 在一固定滑轮上穿一绳，绳的一端挂一重3千克的砝码，另一端挂另一无重的滑轮，在这个滑轮上穿一绳子，绳端分别挂重1千克及2千克的砝码，求重3千克砝码的加速度。

解：如图1.38所示，由于滑轮Ⅱ是无重的，绳子又是不可伸缩的，因此滑轮Ⅱ两边的绳子的张力均相同，并记为T_2，而两边的重物P_3与滑轮I的加速度也一样且记为a_3；同理，滑轮I两边的绳子的张力均相同并记为T_1，而两边重物P_1与P_2的加速度也一样且记为a_2。

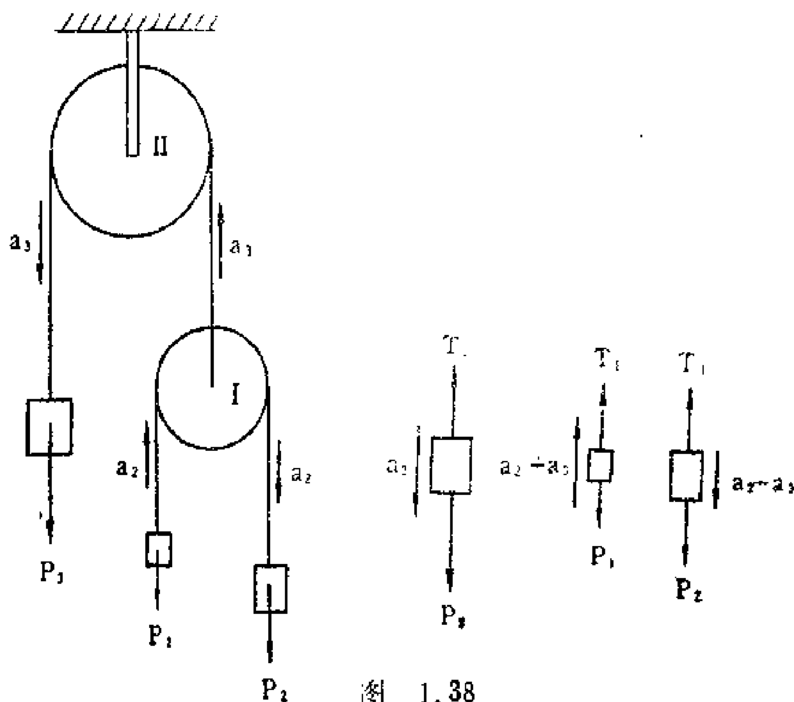


图 1.38

对各个物体应用达朗伯原理得如下方程组：

$$\begin{cases} T_1-P_1-\dfrac{P_1}{g}(a_2+a_3)=0 & (1) \\ P_2-T_1-\dfrac{P_2}{g}(a_2-a_3)=0 & (2) \\ P_3-T_2-\dfrac{P_3}{g}a_3=0 & (3) \\ T_2-2T_1=0 & (4) \end{cases}$$

将（1）式与（2）式相加得

$$P_2-P_1-\frac{P_1}{g}(a_2+a_3)-\frac{P_2}{g}(a_2-a_3)=0$$

即 $$(P_2-P_1)g=(P_1+P_2)a_2-(P_2-P_1)a_3$$

故有 $$a_2=\frac{P_2-P_1}{P_1+P_2}(a_3+g) \tag{5}$$

把（5）式代入（2）式得

$$T_1=P_2-\frac{P_2}{g}\left[\frac{P_2-P_1}{P_1+P_2}(a_3+g)-a_3\right]=\frac{2P_1P_2(a_3+g)}{(P_1+P_2)g} \tag{6}$$

化（3）式得

$$T_2=P_3-\frac{P_3}{g}a_3=\frac{P_3}{g}(g-a_3) \tag{7}$$

将（6）式与（7）式同时代入（4）式得

$$\frac{P_3}{g}(g-a_3)=\frac{4P_1P_2(a_3+g)}{(P_1+P_2)g}$$

即 $$(P_1+P_2)(P_3g-P_3a_3)=4P_1P_2a_3+4P_1P_2g$$

故有 $$a_3=\frac{P_3(P_1+P_2)-4P_1P_2}{P_3(P_1+P_2)+4P_1P_2}g$$

因此，当 $P_1=1$ 千克，$P_2=2$ 千克，$P_3=3$ 千克时，$a_3=\frac{1}{17}g$

例3 尖劈A、重P，其角为α。此尖劈的一面靠在光滑墙上，另一面和重为Q的光滑棱柱B接触。棱柱B可沿一固定水平面无摩擦而滑动，求尖劈及棱柱的加速度a及a_1，又求尖劈对棱柱所施的压力N。

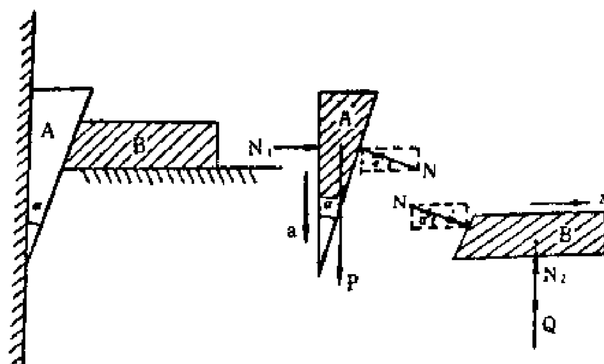


图 1.39

解：如图1.39所示，对各物体应用达朗伯原理得：

$$\begin{cases} P-N\sin\alpha-\frac{P}{g}a=0 & (1)\\ N\cos\alpha-\frac{Q}{g}a_1=0 & (2)\\ a_1=a\,\mathrm{tg}\,\alpha\text{（运动约束）} & (3)\\ N_1-N\cos\alpha=0 & (4)\\ N_2-Q=0 & (5)\end{cases}$$

把（3）式代入（2）式得

$$N=\frac{Q}{g}\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha}a \tag{6}$$

将（6）式代入（1）式得

$$a=\frac{Pg}{P+Q\,\mathrm{tg}^2\alpha} \tag{7}$$

把（7）式代入（6）式即得

$$N=\frac{PQ\sin\alpha}{P\cos^2\alpha+Q\sin^2\alpha}$$

例4 试从系统的动力学的普遍方程，推导出系统的动量定理和角动量定理。

解：由于系统的动力学的普遍方程为

$$\sum_{k=1}^{N}[(X_k-m_k\ddot{x}_k)\delta x_k+(Y_k-m_k\ddot{y}_k)\delta y_k+(Z_k-m_k\ddot{z}_k)\delta z_k]=0 \tag{1}$$

（i）假定加在系统上的约束许可系中，所有质点同沿某一轴向有相同的移动位移。若取此轴为 x 轴，则其位移为

$$\delta x_k=\delta x_0;\quad \delta y_k=0;\quad \delta z_k=0$$

将是所有可能位移中的一种。那么方程式（1）就可变为

$$\sum_{k=1}^{N}(X_k-m_k\ddot{x}_k)\delta x_0=0 \tag{2}$$

由于所有质点的 δx_0 均相同，故（2）式又可写为

$$\left[\sum_{k=1}^{N}(X_k-m_k\ddot{x}_k)\right]\delta x_0=0$$

又由于 δx_0 为任意的，所以上式又可表示为

$$\sum_{k=1}^{N}(X_k-m_k\ddot{x}_k)=0$$

即

$$\sum_{k=1}^{N}X_k=\sum_{k=1}^{N}m_k\ddot{x}_k$$

或

$$\frac{dQ_x}{dt}=\sum_{k=1}^{N}X_k$$

上式表明，系统的动量在 x 轴上的投影对时间的微商是等于作用在系统上所有外力在 x 轴方向上的投影之和。这就是系统的动量定理。

（ii）假定约束许可系中，系统所有的点均绕某一轴转过同一角度 $\delta\varphi$，若选取此轴为 z 轴时，则其位移为：

$$\delta x_k=-y_k\delta\varphi;\quad \delta y_k=x_k\delta\varphi;\quad \delta z_k=0$$

将是所有可能位移中的一种。那么方程式（1）就可写为

$$\sum_{k=1}^{N}[(m_k y_k\ddot{x}_k-y_kX_k)+(x_kY_k-m_kx_k\ddot{y}_k)]\delta\varphi=0$$

或
$$\sum_{k=1}^{N}[(m_k y_k \ddot{x}_k - m_k x_k \ddot{y}_k)+(x_k Y_k - y_k X_k)]\delta\varphi = 0 \tag{3}$$

由于所有质点的$\delta\varphi$均相同，故（3）式可改为

$$\left[\sum_{k=1}^{N}(m_k y_k \ddot{x}_k - m_k x_k \ddot{y}_k + x_k Y_k - y_k X_k)\right]\delta\varphi = 0$$

又由于$\delta\varphi$为任意的，故上式又可表示为

$$\sum_{k=1}^{N}(m_k y_k \ddot{x}_k - m_k x_k \ddot{y}_k + x_k Y_k - y_k X_k) = 0$$

即
$$\sum_{k=1}^{N} m_k (x_k \ddot{y}_k - y_k \ddot{x}_k) = \sum_{k=1}^{N}(x_k Y_k - y_k X_k) \tag{4}$$

由于
$$J_z = \sum_{k=1}^{N} m_k (x_k \dot{y}_k - y_k \dot{x}_k)$$

$$L_z = \sum_{k=1}^{N}(x_k Y_k - y_k X_k)$$

于是（4）式可表示为

$$\frac{dJ_z}{dt} = L_z$$

上式表明，系统的角动量在z轴上的投影对时间的微商，是等于作用在系统上所有的外力对z轴的力距之和。这就是系统的角动量定理。

例5 在一水平轴上装两个固连的滑轮其半径为r_2与r_1，在滑轮上绕有一绳，绳端挂重物P_2及P_1，设无摩擦。如轴与滑轮的重量共为Q，而其总转动惯量为J。求轴的角加速度ε，绳的张力T_2与T_1，又求轴承的总反作用力N。

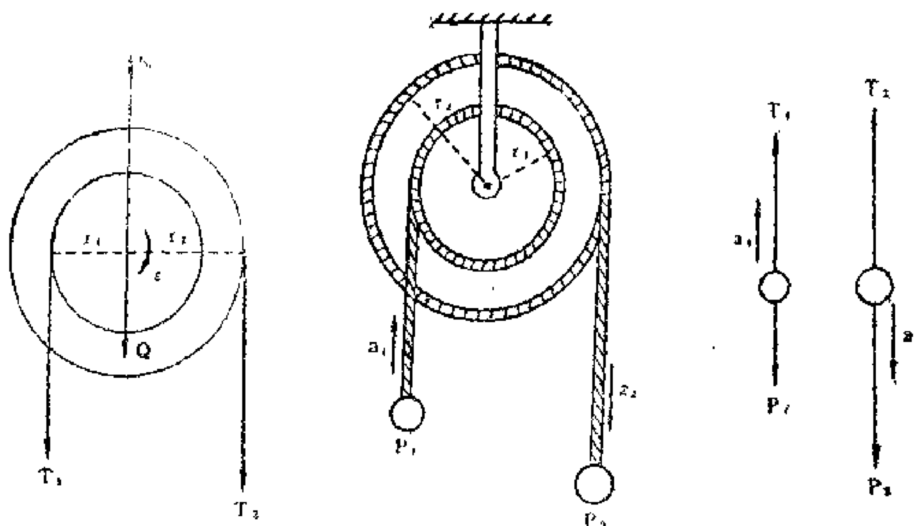


图 1.40

解：对各物体应用达朗伯原理得如下方程组：

$$\begin{cases} P_2-T_2-\dfrac{P_2}{g}a_2=0 & (1)\\ T_1-P_1-\dfrac{P_1}{g}a_1=0 & (2)\\ r_2T_2-r_1T_1-J\varepsilon=0 & (3)\\ N=T_1+T_2+Q & (4)\end{cases}$$

$$a_1=\varepsilon r_1 \qquad (5)$$

$$a_2=\varepsilon r_2 \qquad (6)$$

（由于绳子与滑轮之间没有相对滑动，故有（5）式，（6）式的存在）。现把（6）式代入（1）式得

$$P_2-T_2-\frac{P_2}{g}\varepsilon r_2=0 \qquad (1)'$$

把（5）式代入（2）式得

$$T_1-P_1-\frac{P_1}{g}\varepsilon r_1=0 \qquad (2)'$$

将(1)′式乘 r_2 与(2)′式乘r_1相加便得

$$T_2r_2-T_1r_1=P_2r_2-P_1r_1-\frac{P_2}{g}\varepsilon r_2^2-\frac{P_1}{g}\varepsilon r_1^2 \qquad (7)$$

把（7）式代入（3）式得

$$J\varepsilon=P_2r_2-P_1r_1-\frac{P_2}{g}\varepsilon r_2^2-\frac{P_1}{g}\varepsilon r_1^2$$

于是

$$\varepsilon=\frac{(P_2r_2-P_1r_1)g}{Jg+P_2r_2^2+P_1r_1^2} \qquad (8)$$

把（8）式代入(1)′式得

$$T_2=P_2\left(1-\frac{\varepsilon r_2}{g}\right)$$

$$=\frac{Jg+P_1r_1(r_1+r_2)}{Jg+P_2r_2^2+P_1r_1^2}\cdot P_2 \qquad (9)$$

把（8）式代入(2)′式得

$$T_1=P_1\left(1+\frac{\varepsilon r_1}{g}\right)$$

$$=\frac{Jg+P_2r_2(r_1+r_2)}{Jg+P_2r_2^2+P_1r_1^2}\cdot P_1 \qquad (10)$$

把（9）式与（10）式同时代入（4）即得

$$N=Q+P_1+P_2-\frac{(P_2r_2-P_1r_1)^2}{Jg+P_2r_2^2+P_1r_1^2}$$

例6 在铅垂杆OC上以铰链O固定两相同的杆AO及OB，二杆各长$2a$，各重P，并能在铅垂平面内绕O点转动。此二杆之A与B端各连一长$2a$之绳，此二绳支持一重物Q的滑块，滑块可在CO轴上自由滑动。如此系统绕CO轴以等角速ω转动，求二杆和铅垂

轴所成之角φ及绳子的张力T.

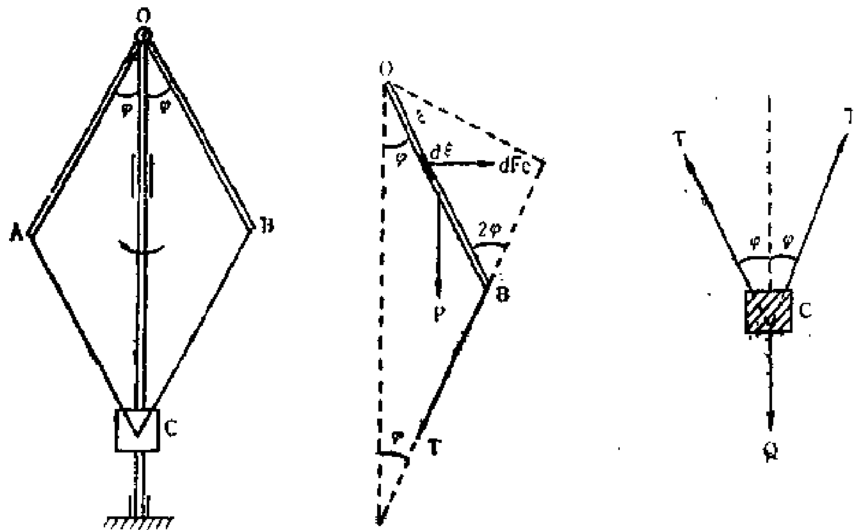


图 1.41

解：如图1.41所示，若取OB杆上一微元$d\xi$，其质量为$dm=\frac{M}{2a}d\xi$，式中M为OB杆的质量。那么，此微元所受的惯性离心力为

$$dFe=\omega^2(\xi\sin\varphi)dm$$

$$=\frac{\omega^2P\sin\varphi}{2ag}\xi d\xi$$

因此，该微元的离心力距（对O点）为

$$dLe=\xi\cos\varphi\, dFe$$

$$=\frac{\omega^2P\sin\varphi\cos\varphi}{2ag}\xi^2d\xi$$

于是，整根杆OB对O点的离心力矩为

$$Le=\int_0^{2a}\frac{\omega^2P\sin\varphi\cos\varphi}{2ag}\xi^2d\xi$$

$$=\frac{4}{3}\frac{P}{g}\omega^2a^2\sin\varphi\,\mathrm{sos}\,\varphi \tag{1}$$

对OB杆应用达朗伯原理得

$$Le-T\cdot2a\sin2\varphi-Pa\sin\varphi-J\ddot{\varphi}=0$$

式中J为OB杆对过O的垂直于杆的轴的转动惯量.

由于φ要保持为常数，所以$\ddot{\varphi}=0$. 故上式又可改写为

$$Le-T\cdot2a\sin2\varphi-Pa\sin\varphi=0 \tag{2}$$

对滑块C应用达朗伯原理得

$$2T\cos\varphi-Q-m\ddot{y}=0$$

式中$\ddot{y}$为滑块C的加速度，$m=\frac{Q}{g}$．由题设得知$\ddot{y}=0$，于是上式又可表示为

$$2T\cos\varphi-Q=0 \tag{3}$$

把（1）式与（3）式同时代入（2）式得

$$\frac{4}{3}\frac{P}{g}\omega^2a^2\sin\varphi\cos\varphi-2Q\sin\varphi\cdot a-P\sin\varphi\cdot a=0$$

即
$$\left(\frac{4}{3}\frac{P}{g}\omega^2a\cos\varphi-2Q-P\right)a\sin\varphi=0$$

由于$\sin\varphi$不为零，故得

$$\cos\varphi=\frac{3g}{4\omega^2aP}(P+2Q) \tag{4}$$

将（4）式代入（3）式便得

$$T=\frac{2\omega^2aPQ}{3g(P+2Q)}$$

例7 二均匀杆OA与OB各重P，用铰链O连在垂直杆OC上，其A与B端又用不可伸长的水平绳连在这杆的C点，三角形AOB开始以等角速ω绕OC轴转动，如$OA=OB=a$，$AC=CB=l$，求绳的张力T．

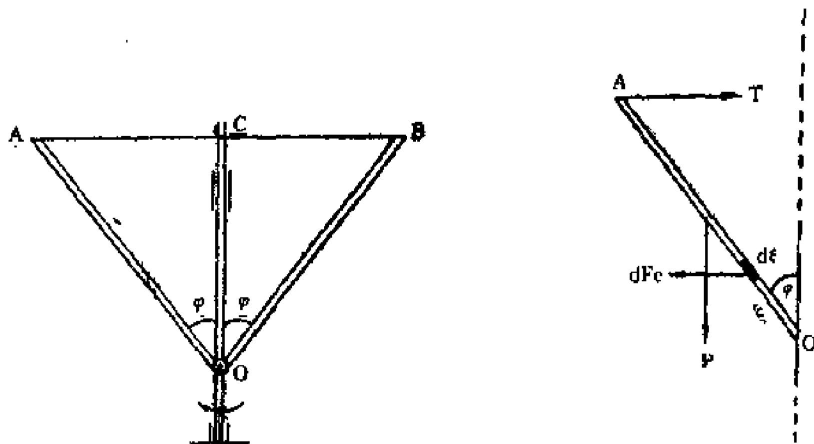


图 1.42

解：如图1.42所示，若取OA杆上一微元$d\xi$，其质量为

$$dm=\frac{P}{ag}d\xi$$

那么此微元所受的惯性离心力为

$$dFe=\omega^2(\xi\sin\varphi)dm$$
$$=\frac{\omega^2\sin\varphi\cdot P}{ag}\xi d\xi$$

于是，此微元离心力dFe对O点所产生的微离心力矩为

$$dLe=\xi\cos\varphi\,dFe$$

$$=\frac{\omega^2 P\sin\varphi\cos\varphi}{ag}\xi^2 d\xi$$

因此，整根杆OA对O点的离心力矩为

$$Le=\int_0^a \frac{\omega^2 P\sin\varphi\cdot\cos\varphi}{ag}\xi^2 d\xi$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{\omega^2 P\sin\varphi\cdot\cos\varphi}{g} \qquad (1)$$

对OA杆应用达朗伯原理得

$$Le+P\cdot\frac{a}{2}\sin\varphi-T\cdot a\cos\varphi-J\ddot{\varphi}=0$$

式中J为OA杆对过O的垂直于杆的轴的转动惯量，$\ddot{\varphi}$为其绕此轴的转动角加速度。由于φ要保持为常数，所以$\ddot{\varphi}=0$。于是，上述式子又可写为

$$Le+P\cdot\frac{a}{2}\sin\varphi-T\cdot a\cos\varphi=0 \qquad (2)$$

又由题给条件得

$$\sin\varphi=\frac{l}{a},\qquad \mathrm{tg}\,\varphi=\frac{l}{\sqrt{a^2-l^2}} \qquad (3)$$

把（1）式与（3）式同时代入（2）式便得

$$T=\frac{1}{3}\cdot\frac{P}{g}\omega^2 a\sin\varphi+\frac{1}{2}P\,\mathrm{tg}\,\varphi$$

$$=\frac{Pl}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{a^2-l^2}}+\frac{2\omega^2}{3g}\right)$$

例8 均匀杆AOB构成一[illegible]形状，其顶点O用铰链连在铅垂轴z上。这杆可以在铅垂平面内绕铰链转动，而铅垂轴z则以等角速ω转动。如倾斜杆AO和铅垂轴z成等角α。求ω的值。已知$AO=a$，$OB=b$。

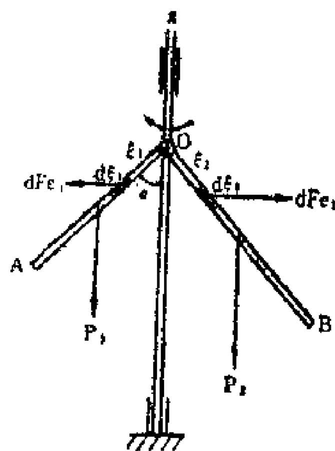


图1.43

解：如图1.43所示，若在AOB杆的OA段上选微元$d\xi_1$，其质量为

$$dm_1=\frac{p_1}{ag}d\xi_1$$

那么$d\xi_1$微元所受的惯性离心力为

$$dFe_1=\omega^2(\xi_1\sin\alpha)\cdot\frac{p_1}{ag}d\xi_1$$

于是，此微元离心力dFe_1对过O水平轴的惯性离心力矩为

$$dLe_1=\xi_1\cos\alpha\,dFe_1$$

$$=\frac{\omega^2 p_1\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{ag}\xi_1^2 d\xi_1$$

因此，整段 Ao 对过O水平轴的惯性离心力距为

$$Le_1=\int^a \frac{\omega^2 p_1 \sin\alpha\cos\alpha}{ag}\xi_1^2 d\xi_1$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{p_1}{g}\omega^2 a^2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$

而 p_1 对过O水平轴的力距为：$-p_1\cdot\frac{a}{2}\sin\alpha$

同理，OB 段对过 O的水平轴的离心力距为

$$Le_2=-\frac{1}{3}\cdot\frac{p_2}{g}\omega^2 b^2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$

而 p_2 对过O水平轴的力距为：$p_2\cdot\frac{b}{2}\cos\alpha$。

因此，对 AoB 杆应用达朗伯原理得：

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{p_1}{g}\omega^2 a^2\sin\alpha\cdot\cos\alpha-p_1\cdot\frac{a}{2}\sin\alpha-\frac{1}{3}\frac{p_2}{g}\omega^2 b^2\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\frac{p_2 b}{2}\cos\alpha-$$

$$-J\ddot{\alpha}=0$$

式中 J 为 AOB 杆绕过O的水平轴的转动惯量，$\ddot{\alpha}$为其绕此轴的转动角加速度。由于 α 要保持不变，所以 $\ddot{\alpha}=0$。于是，上式可改写为

$$\frac{1}{3}\frac{p_1}{g}\omega^2 a^2\sin\alpha\cdot\cos\alpha-p_1\cdot\frac{a}{2}\sin\alpha-\frac{1}{3}\cdot\frac{p_2}{g}\omega^2 b^2\sin\alpha\cos\alpha+p_2\cdot\frac{b}{2}\cos\alpha=$$
$$=0$$

即
$$\frac{1}{3g}\omega^2\sin\alpha\cdot\cos\alpha(p_1 a^2-p_2 b^2)=\frac{1}{2}(p_1 a\sin\alpha-p_2 b\cos\alpha) \quad (1)$$

由于直角曲杆AOB是均匀的，故有

$$p_1=\frac{p}{(a+b)}a,\qquad p_2=\frac{p}{(a+b)}b \quad (2)$$

式中 p 为直角曲杆AOB 的重量。

把（2）式代入（1）式即得

$$\omega^2=\frac{3(a^2\sin\alpha-b^2\cos\alpha)}{2(a^3-b^3)\sin\alpha\cdot\cos\alpha}\cdot g$$

从上述的例题中，我们可以清楚地看到，达朗伯惯性力与非惯性系中出现的惯性力是有本质的不同。达朗伯惯性力是一种虚构假想的力，而非惯性系中的惯性力是由于坐标系的加速运动或转动而引起的。

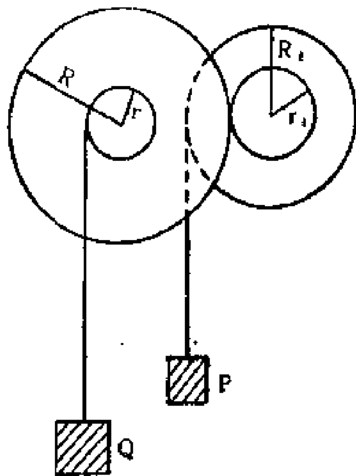
习　题

1．铅垂力Q作用于半径为 r 的轴上，轴上固联一半径为R的齿轮；另一铅垂力P作用于半径为 R_1 的轴上，此轴固连一半径为 r_1 的齿轮。求平衡时力P与Q之间的关系。

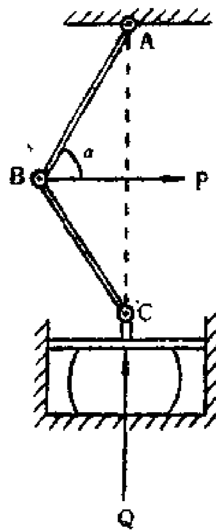
（答：$\frac{P}{Q}=\frac{rr_1}{RR_1}$）

2．在曲柄式压榨机 ABC 的中间铰链 B 上有水平力 P 作用在 ABC 的平面内。作用在 C 点的力为 Q，其方向沿直线 AC，欲使 Q 与 P 平衡，Q 值应为多大？（$AB=BC$，$\angle ABC=2\alpha$）

（答：$Q=\frac{1}{2}P\operatorname{tg}\alpha$）



题 1 图



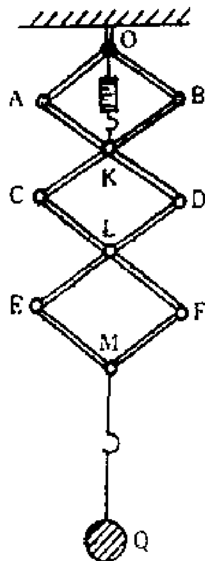
题 2 图

3．平面连杆机构的构造如图所示。OA，OB，AD，BC，……等杆无重量，且组成一列菱形。OK 为弹簧称。如下端所悬重量为 Q 千克，求弹簧称所指示之值。

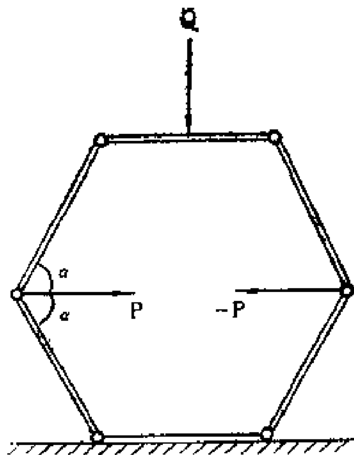
（答：nQ 千克，其中 n 为菱形的数目，此图中 $n=3$）。

4．等边六角形连杆，其基础为固定不动，受 P，$-P$，Q 三力作用如图所示。求平衡时这些力之间的关系。α 角为已知。

（答：$Q=P\cdot\operatorname{tg}\alpha$）



题 3 图



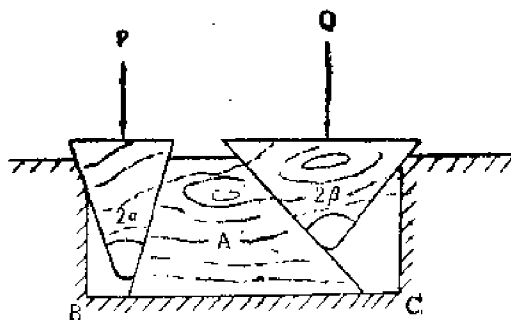
题 4 图

5．物体A搁在一水平面BC上并位于二等腰尖劈之间，此二尖劈之角为2α及2β。力P垂直作用在第一尖劈上；力Q垂直作用在第二尖劈上。求平衡时二力之间的关系。

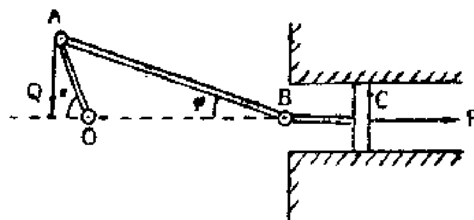
（答：$Q=P\cdot \mathrm{tg}\,\alpha$）

6．求图示机构平衡时下列诸力之间的关系：P为水平力，作用于活塞C上，Q为垂直力，作用于曲柄的销钉A上。α角及φ角为已知。

（答：$\dfrac{Q}{P}=\dfrac{\sin(\alpha-\varphi)}{\cos\alpha\cdot\cos\varphi}$）．



题5图



题6图

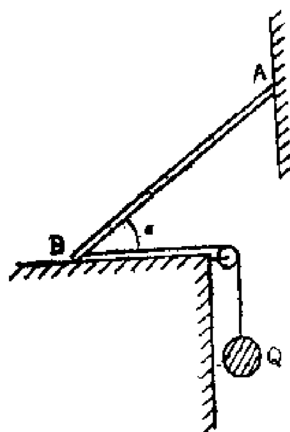
7．均匀杆重P，其上端靠在不光滑的垂直墙上（摩擦系数为μ），其下端则在一光滑水平桌上．为使此杆在垂直平面内平衡，在其下端连一绳，此绳沿桌面伸出，经过一滑轮并在其自由端挂一重Q之物．求此杆平衡时的倾斜角α并求A及B点的反作用力．

（答：$\mathrm{tg}\,\alpha=\dfrac{P}{2Q}+K$，此时$\mu\geqslant K\geqslant-\mu$，$N_A=Q\sqrt{1+K^2}$，$N_B=P+KQ$）

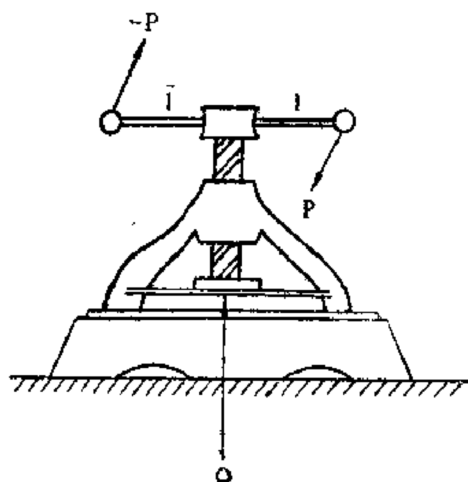
8．求图示压榨机上诸力的平衡条件，如水平力P和$-P$垂直作用于把手上，l为每一把手的长，h为螺距。螺纹是方形的，螺纹间的摩擦系数$\mu=\mathrm{tg}\varphi$。

（答：$\dfrac{Q}{P}=\dfrac{2l(\cos\alpha-\mu\sin\alpha)}{r(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)}$ 或 $\dfrac{Q}{P}=\dfrac{2l}{r}\mathrm{ctg}(\alpha+\varphi)$

其中α为螺面的倾斜角）．



题7图



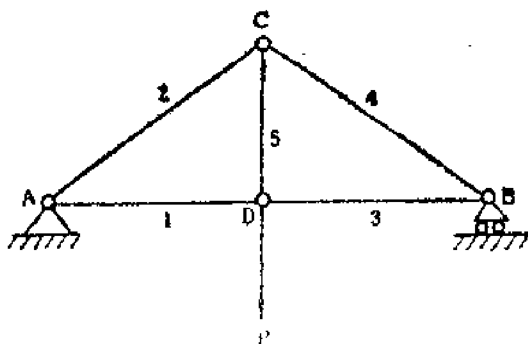
题8图

9．用虚位移法求图示桁架中杆3的内力，已知：$AD=DB=8$米；$DC=4$米；$P=3$吨。

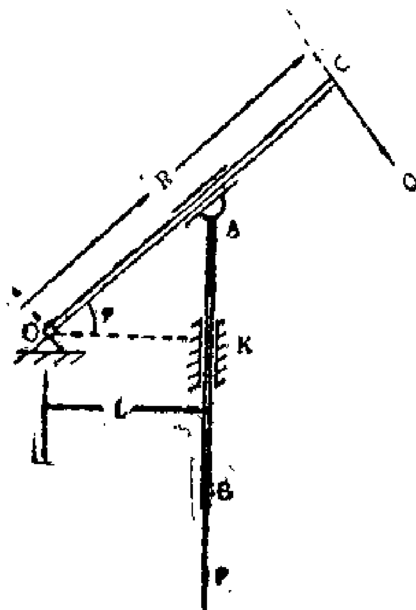
（答：$S_3=3$吨）

10。在连杆机构中当曲柄OC绕水平轴O摆动时，滑块A沿曲柄OC滑动并带动一沿铅垂导板K运动的杆子AB。已知：$OC=R$，$OK=L$，问在C点并垂直于曲柄OC方向应作用多大的力Q才能平衡一沿杆AB方向并朝上的力P。

（答：$Q=\dfrac{PL}{R\cos^2\varphi}$）。



题9图



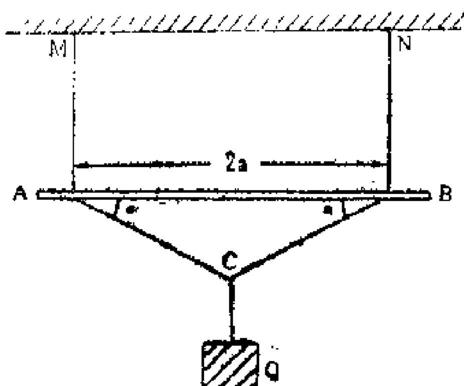
题10图

11。距重P的均质水平棒两端A及B不远处打两个相距为$2a$的小孔，通过小孔穿一根长$2l$的绳子，绳子中间悬一重物Q，绳之两端M及N固结在相距为$2a$并同在一水平上的两点。求此系统平衡的α角。

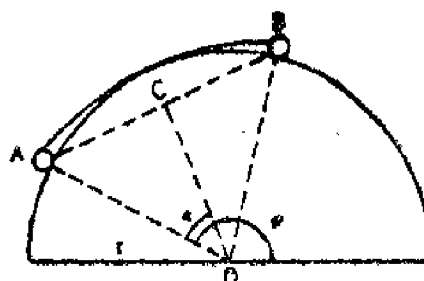
（答：$\sin\alpha=\dfrac{Q}{P+Q}$）。

12，均质重链的两端连两球A和B，各重P及Q。链放在半径为r的半圆柱面上。求在平衡时垂直于AB的直线OC和水平所成的角度φ。设α角为已知，重链单位长度的重量为ρ。

（答：$\mathrm{tg}\varphi=\dfrac{(P+Q)\cos\alpha+2r\rho\sin\alpha}{(P-Q)\sin\alpha}$）



题11图



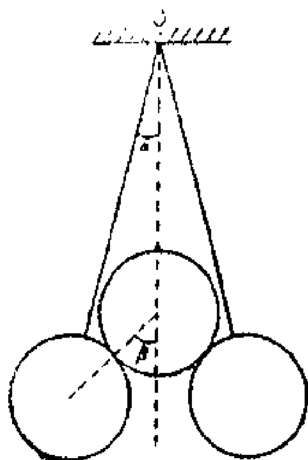
题12图

13．相同的两个光滑球悬在结于定点O的两条绳子上；此两球同时又支持一个等重的第三球．求α及β角之间的关系．

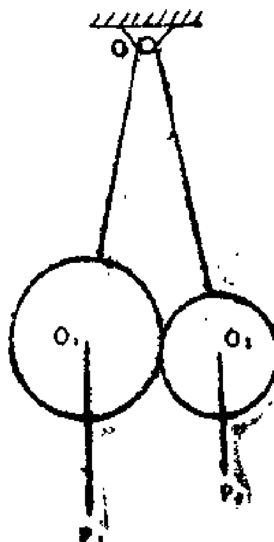
（答：$tg\beta=3\,tg\,\alpha$）

14．半径为r_1和r_2、重量为P_1和P_2的两个球悬于绕过小滑轮O的绳上，二球彼此相切并处于平衡状态．求平衡的条件．

（答：$\frac{OO_1}{OO_2}=\frac{P_2}{P_1}$，如此二球用同质做成，则此条件成为：$\frac{OO_1}{OO_2}=\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^3$）



题13图



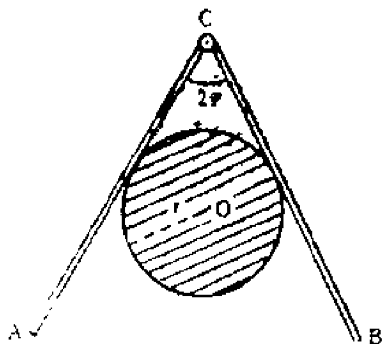
题14图

15．两根长$2l$、重P的均质棒以铰链C互相连结并靠在一个半径为r、其轴为水平的光滑固定圆柱上．求系统平衡时的角度$\angle ACB=2\varphi$．

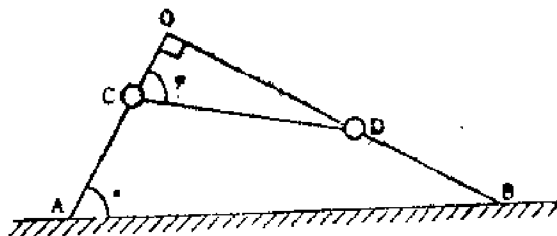
（答：φ角可由方程式 $l\sin^3\varphi-r\cos\varphi=0$ 求出）

16．铁丝直角三角形AOB位于铅垂平面内，其斜边为水平．在其对边及底边上穿过两个重P与Q之小球，小球以不能伸长的线联结．如已知$\angle BAO=\alpha$且无摩擦力，求平衡的位置（$\angle OCD=\varphi$）．

（答：$tg\varphi=\frac{Q}{P}ctg\,\alpha$）



题15图



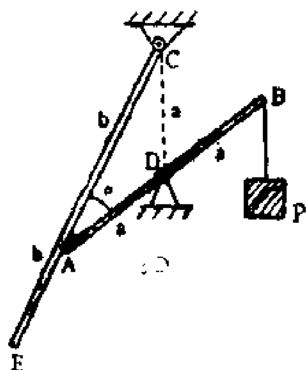
题16图

17. 两根均质的棒子：AB 长 $2a$，CE 长 $2b$、重 Q。两棒均能在垂直平面内转动；第一根棒绕其自身中点 D 而第二棒则绕与 D 同在一铅垂线上相距为 $CD=a$ 的 C 点转动。在棒 AB 之 B 端固结一重 P 的重物，因此，棒 AB 之 A 端靠在 CE 上并推开 CE 使它离开铅垂位置。求此系统平衡时的角度 $\alpha=\angle CAB$。

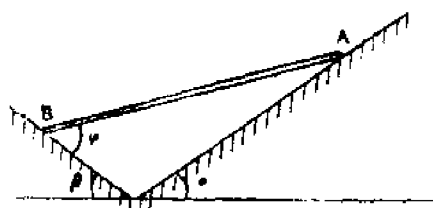
（答：α 可能有两个值：$\alpha_1=0$ 与 $\alpha_2=\arccos\dfrac{Qb}{4aP}$）

18. 重 P 之均匀棒 AB 搁在两固定平面上，此二平面与水平成 α 及 β 角，求平衡时角 φ。

（答：$\operatorname{tg}\varphi=\dfrac{2\sin\alpha}{\sin\beta\cdot\sin(\alpha+\beta)}-\operatorname{ctg}\beta$）



题17图



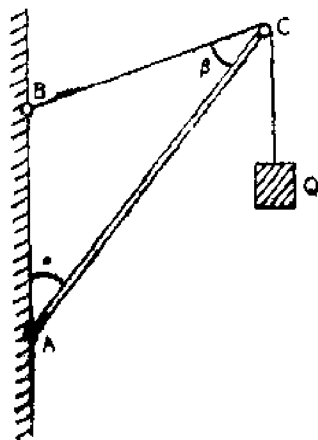
题18图

19. 起重机由一重 P 可以绕铰链 A 转动的均匀杆及一固结于 B 点之链 BC 组成，在棒之一端 C 悬一重 Q 之物，如 α 及 β 角为已知，求链之张力 T 的大小，当链成为水平时，问张力 T 将有何变化？

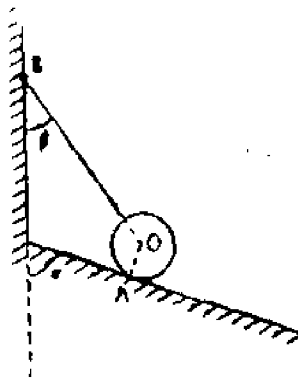
（答：$T=\dfrac{(2Q+P)\sin\alpha}{2\sin\beta}$）

20. 重 P 的球用绳子固定于定点 B，球靠在斜面上 A 点，如果已知 α 及 β 角，求绳子的张力 T。

（答：$T=\dfrac{P\cos\alpha}{\cos(\alpha-\beta)}$）



题19图



题20图

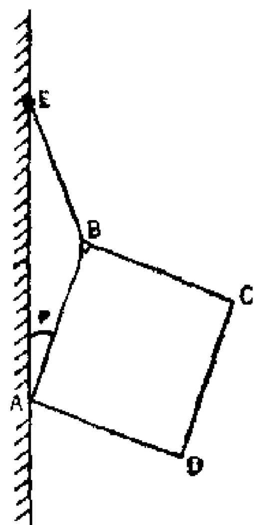
21. 重P之方板 $ABCD$ 悬在绳 BE 上，其顶角 A 靠在固定的光滑垂直墙 EA 上，若 $AB=BE=a$，求平衡时角度 φ 以及绳子的张力 T。

（答：$\mathrm{tg}\varphi=\frac{1}{3}$，$T=\frac{1}{3}\sqrt{10}P$）

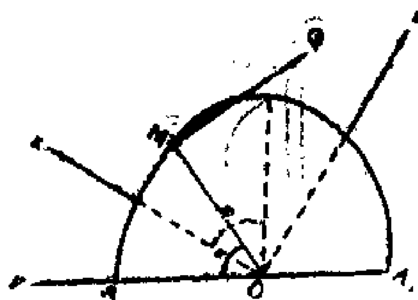
22. 半径为 r 的半圆形均匀平板，其重为 P，可就其铰支点 A 与 A_1 绕水平轴 y 自由转动。今在与 y 轴成 α 角的半径端点 M 加一垂直于板面之力 Q，如平衡时平板与水平成的角度为 φ。求此力的大小。

（提示：半圆的重心到圆心之距离为 $\frac{4r}{3\pi}$）

（答：$Q=\frac{4}{3\pi}\cdot\frac{\cos\varphi}{\sin\alpha}P$）



题21图



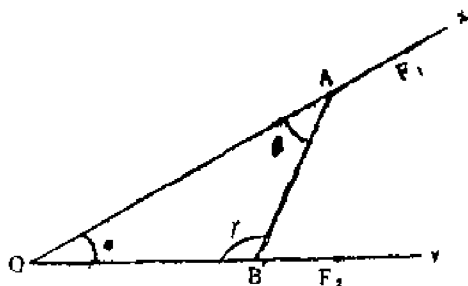
题22图

23. A 与 B 两点用一不可伸长的绳联结。此两点可沿二光滑固定直线 ox 及 oy 滑动，ox 及 oy 互成 α 角。这两点均受 o 点吸引，吸引力与距离成正比，对 A 点的力其比例常数为 K_1，而对 B 点的力其比例常数为 K_2，求在平衡位置时绳子与直线 oA 及 oB 所成的角 β 及 γ。

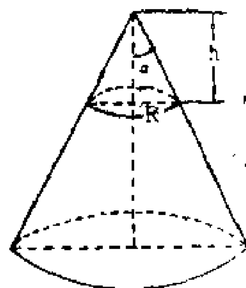
（答：$\mathrm{tg}\,2\beta=-\frac{K_1\sin 2\alpha}{K_2+K_1\cos 2\alpha}$，　$\mathrm{tg}\,2\gamma=-\frac{K_2\sin 2\alpha}{K_1+K_2\cos 2\alpha}$）

24. 重 P、固有长度为 l，弹性模量为 λ 的弹性圈放在顶角为 2α 的光滑竖直圆锥体上。求平衡时，圈面离圆锥体顶点的距离 h。

（答：$h=\frac{l}{2\pi\,\mathrm{tg}\,\alpha}\left(1+\frac{P}{2\pi\lambda\,\mathrm{tg}\,\alpha}\right)$）



题23图



题24图

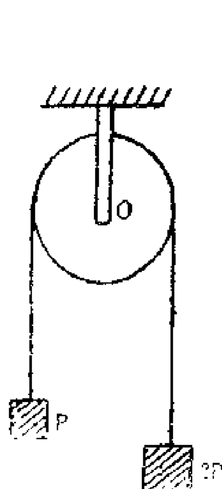
25. 在固定滑轮上用绳挂二重为 $2P$ 与 P 的重物如图所示。若空气阻力和重物速度成正比，其比例系数对此二重物皆为 $\mu=km$，其中 m 为较轻的重物的质量。求以时间的函数表示的重物之速度及加速度。设开始时重物的速度均等于零。滑轮的质量不计。

（答：$v=\dfrac{g}{2k}(1-e^{-\frac{2}{3}kt})$， $a=\dfrac{1}{3}ge^{-\frac{2}{3}kt}$ ）

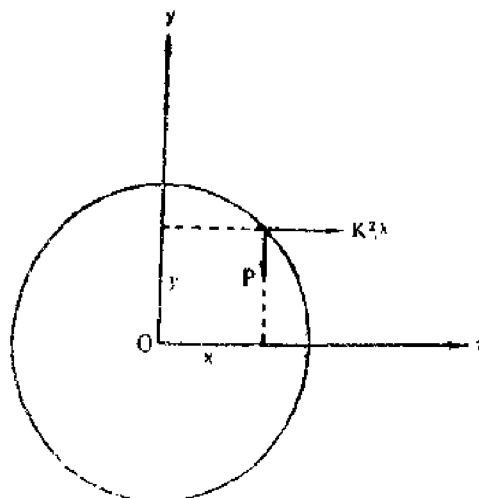
26. 一质点的重为 P 被约束在竖直圆周 $x^2+y^2=R^2$ 上，并受一水平斥力 k^2x 的作用，求质点的平衡位置及约束力。

（答：$x=0$，$y=\pm R$，$N=\pm P$；

$$x=\pm\sqrt{R^2-\frac{P^2}{k^4}},\quad y=\frac{P}{k^2},\quad N=-k^2R\text{ ）}$$



题25图



题26图

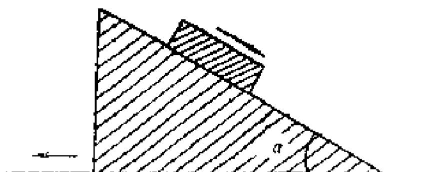
27. 直角尖劈重 P 其角为 α，放在一光滑水平面上。另有一物体重 Q 沿此尖劈无摩擦面滑动。求此系统的运动，又求水平面上的压力及物体对尖劈的压力。

（答：尖劈的加速度 $a=\dfrac{Q\sin 2\alpha}{2(P+Q\sin^2\alpha)}g$

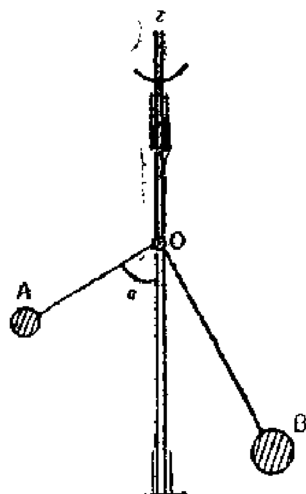
物体相对于尖劈的加速度 $a_r=\dfrac{(P+Q)\sin\alpha}{P+Q\sin^2\alpha}g$ ）

28. 直角尺形刚体 AOB 的质量可以不计，今用铰链将此直角的顶点 O 连到垂直轴 z 上，使它在铅垂面内绕 O 点转动之同时又能绕 z 轴而转动。在 A 与 B 端连着两个可看成二质点的重物，其重量为 P_1 与 P_2。如 $AO=l_1$，$BO=l_2$，问当 AO 杆和铅垂线成 α 角时，绕 z 轴的角速度 ω 应为何值？

（答：$\omega^2=\dfrac{P_1l_1\sin\alpha-P_2l_2\cos\alpha}{(P_1l_1^2-P_2l_2^2)\sin\alpha\cos\alpha}$ ）



题27图



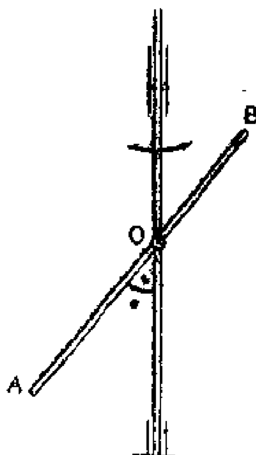
题28图

29. 均匀直杆AB可绕其上的固定点O在铅垂平面内转动。经O点通过一铅垂轴z，AB杆绕z轴作每分n转的等速运动。如$OA=a$，$OB=b$，而$a>b$，则AB杆和z轴所成的角α（=常数）之值等于多少？

（答：$\cos\alpha=\frac{1350\,g}{\pi^2 n^2}\cdot\frac{a-b}{a^2-ab+b^2}$）

30. 长l、重P的均匀链条。今将其两端连接，使成为一半径r的圆，并放在一水平的粗糙圆盘上。令圆盘绕通过链圆中心的铅垂轴作等速转动。如此链所能承受的张力不超过F千克，问圆盘速度ω等于何值时方能拉断此链？

（答：$\omega=\sqrt{\frac{gl}{r^2}\cdot\frac{F}{P}}$）



题29图

第二章 拉格朗日方程

前面我们曾经建立过动力学的普遍方程，从理论上来说，通过它，我们可以解决所有的动力学问题。可是，往往直接通过它来解决动力学问题时，会感到并不是十分方便的。为此，我们常从它出发，适当加一些条件，然后通过简单的变换，就可导出力学的普遍运动方程式，进而解决动力学的问题。如拉格朗日方程和哈密顿正则方程等。本章先介绍一下拉格朗日方程。

§2—1 第一类拉格朗日方程

为了求得约束力，我们下面利用拉格朗日不定乘子法，来推导第一类拉格朗日方程。

设我们所研究的质点组是由 N 个质点所组成，受 m 个完整约束。若采用曲线坐标 $x_l(l=1,2,3,\cdots,3N)$ 表示时，其约束方程为

$$f_s(x_l,t)=0 \qquad (s=1,2,3,\cdots,m) \tag{2.1}$$

而第k个质点的位矢可表示为

$$\mathbf{r}_k=\mathbf{r}_k(x_l,t)$$

于是

$$\delta\mathbf{r}_k=\sum_{l=1}^{3N}\frac{\partial\mathbf{r}_k}{\partial x_l}\delta x_l \tag{2.2}$$

将（2.2）式代入动力学的普遍方程（1.43）式即得

$$\sum_{k=1}^{N}(\mathbf{F}_k-m_k\ddot{\mathbf{r}}_k)\cdot\sum_{l=1}^{3N}\frac{\partial\mathbf{r}_k}{\partial x_l}\delta x_l=0$$

或

$$\sum_{l=1}^{3N}\left(\sum_{k=1}^{N}\mathbf{F}_k\cdot\frac{\partial\mathbf{r}_k}{\partial x_l}\right)\delta x_l-\sum_{l=1}^{3N}\left(\sum_{k=1}^{N}m_k\frac{d\mathbf{v}_k}{dt}\cdot\frac{\partial\mathbf{r}_k}{\partial x_l}\right)\delta x_l=0$$

由广义力的定义得

$$Q_l=\sum_{k=1}^{N}\mathbf{F}_k\cdot\frac{\partial\mathbf{r}_k}{\partial x_l}$$

即 Q_l 是对应于曲线坐标 x_l 的广义力。把 Q_l 的表达代入上述方程得

$$\sum_{l=1}^{3N}Q_l\delta x_l-\sum_{l=1}^{3N}\left(\sum_{k=1}^{N}m_k\frac{d\mathbf{v}_k}{dt}\cdot\frac{\partial\mathbf{r}_k}{\partial x_l}\right)\delta x_l=0 \tag{2.3}$$

考虑上式左端的第二项：

$$-\sum_{l=1}^{3N}\left(\sum_{k=1}^{N}m_k\frac{d\mathbf{v}_k}{dt}\cdot\frac{\partial\mathbf{r}_k}{\partial x_l}\right)\delta x_l=-\sum_{l=1}^{3N}\sum_{k=1}^{N}m_k\frac{d}{dt}\left(\mathbf{v}_k\cdot\frac{\partial\mathbf{r}_k}{\partial x_l}\right)\delta x_l+$$

$$+\sum_{i=1}^{3N}\sum_{k=1}^{N} m_k \mathbf{v}_k\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial x_i}\right)\delta x_i \qquad (2.4)$$

如果存在这样的关系：

$$\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial x_i} = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_k}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial \mathbf{v}_k}{\partial \dot{x}_i} \quad 与 \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial x_i}\right)=\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_k}{\partial x_i}=\frac{\partial \mathbf{v}_k}{\partial x_i}$$

那么（2.4）式就可改写为

$$-\sum_{i=1}^{3N}\left(\sum_{k=1}^{N} m_k \frac{d\mathbf{v}_k}{dt}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial x_i}\right)\delta x_i = -\sum_{i=1}^{3N}\left\{\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{x}_i}\left(\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2}m_k\mathbf{v}_k^2\right)\right]\right\}\delta x_i +$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\sum_{k}\frac{1}{2}m_k\mathbf{v}_k^2\right]\right\}\delta x_i$$

即 $$-\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{k=1}^{N} m_k \frac{d\mathbf{v}_k}{dt}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial x_i}\right)\delta x_i = -\sum_{i=1}^{3N}\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}\right)\right\}\delta x_i + \sum_{i=1}^{3N}\left\{\frac{\partial T}{\partial x_i}\right\}\delta x_i \qquad (2.5)$$

式中 T 表示质点组的动能。

把（2.5）式代入（2.3）式即得

$$\sum_{i=1}^{N}\left\{Q_i-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}\right)+\frac{\partial T}{\partial x_i}\right\}\delta x_i=0 \qquad (2.6)$$

现在，证明（1）$\dfrac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial x_i}=\dfrac{\partial \mathbf{v}_k}{\partial \dot{x}_i}$

由于 $\mathbf{r}_k=\mathbf{r}_k(x_i,t) \quad (i=1,2,3,\cdots,3N)$

所以 $$\mathbf{v}_k=\frac{d\mathbf{r}_k}{dt}=\sum_{i=1}^{3N}\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial x_i}\dot{x}_i+\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial t}$$

于是 $\dfrac{\partial \mathbf{v}_k}{\partial \dot{x}_i}=\dfrac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial x_i}$ 得证。

其次证明（2）$\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial x_i}\right)=\dfrac{\partial \dot{\mathbf{r}}_k}{\partial x_i}=\dfrac{\partial \mathbf{v}_k}{\partial x_i}$

由于 $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial x_i}\right)=\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial x_i}\right)\dot{x}_j+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial x_i}\right)$$

交换对 x_i，x_j 的偏导数的次序得

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial x_i}\right)=\sum_{j=1}^{3N}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial x_j}\right)\dot{x}_j+\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial t}\right)$$

由于 i 与对 j 求和无关，上式又可写为

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial x_l}\right)=\frac{\partial}{\partial x_l}\left[\sum_{j=1}^{3N}\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial x_j}\dot{x}_j+\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial t}\right]=\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_k}{\partial x_l}=\frac{\partial \mathbf{v}_k}{\partial x_l}$$

故得证。

若对约束方程组（2.1）取等时变分，那么便得

$$\sum_{l=1}^{3N}\frac{\partial f_s}{\partial x_l}\delta x_l=0 \qquad (s=1,2,3,\cdots,m) \tag{2.7}$$

由于 $3N$ 个 δx_l 不是彼此独立的，只有 $n=3N-m$ 个是独立的。于是，我们适当选取 m 个的拉格朗日不定乘子 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$，将（2.7）式中每一个与 S 对应的式子乘以 λ_s，然后依次与（2.6）式相加便得

$$\sum_{l=1}^{3N}\left[Q_l-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_l}\right)+\frac{\partial T}{\partial x_l}+\sum_{s=1}^{m}\lambda_s\frac{\partial f_s}{\partial x_l}\right]\delta x_l=0 \tag{2.8}$$

正因为我们适当选取了 m 个拉格朗日不定乘子 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$，使得 m 个不独立的虚位移前的系数为零。所以（2.8）式中就只余下包括 n 个独立虚位移的项。因此，它们前面的系数必须为零。于是，（2.8）式将变为

$$Q_l-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_l}\right)+\frac{\partial T}{\partial x_l}+\sum_{s=1}^{m}\lambda_s\frac{\partial f_s}{\partial x_l}=0$$

即

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_l}\right)-\frac{\partial T}{\partial x_l}=Q_l+\sum_{s=1}^{m}\lambda_s\frac{\partial f_s}{\partial x_l} \qquad (l=1,2,\cdots,3N) \tag{2.9}$$

这就是完整质点组的**第一类格拉格朗日方程**。共有 $3N$ 个方程，连同 m 个约束方程就可以确定质点组的 $3N$ 个坐标 x_l 与 m个拉格朗日不定乘子λ_s。至于约束力的求得，可以与分析静力学的求法相同。即

$$\mathbf{N}_k=\sum_{s=1}^{m}\mathbf{N}_s=\sum_{s=1}^{m}\lambda_s\nabla_k f_s$$

从方程式（2.9）可以看出，如果组成质点组的质点数目与加在质点组上的约束愈多时，那么采用第一类拉格朗日方程来研究质点的运动也就愈困难。

§2—2 第二类拉格朗日方程

在约束愈多的情况下，利用第一类拉格朗日方程解决动力学问题时，会感到愈困难，这主要是由于采用了笛卡尔坐标的缘故。因为这些笛卡尔坐标必须满足约束方程，所以它们不是彼此独立的。当约束的数目愈多，不独立的坐标数目就愈多。于是，拉格朗日不定乘子的数目也愈多。倘若采用了广义坐标的表示形式，这些困难就可大大减少。因为广义坐标是彼此独立的，所以当系统约束数目愈多，广义坐标数目反而减少。这样一来，我们便找到了解决动力学实际问题的更为普遍的运动方程——第二类拉格朗

日方程。

下面我们来推导第二类拉格朗日方程，其方法与前面推导第一类拉格朗日方程相仿，只不过采用分量式子。

假设我们所研究的质点组是由 N 个质点所组成，受 m 个完整约束。若我们采用曲线坐标表示时，那么第 k 个质点的位矢 $\mathbf{r}_k$ 可表为

$$\mathbf{r}_k = x_{3k-2}\mathbf{i} + x_{3k-1}\mathbf{j} + x_{3k}\mathbf{k}$$

而作用在第 k 个质点上的所有外力之和可表示为

$$\mathbf{F}_k = X_{3k-2}\mathbf{i} + X_{3k-1}\mathbf{j} + X_{3k}\mathbf{k}$$

至于质量又有关系

$$m_{3k-2} = m_{3k-1} = m_{3k}$$

于是，动力学的普遍方程（1.43）式可写成如下形式

$$\sum_{k=1}^{3N}(X_k - m_k\ddot{x}_k)\delta x_k = 0 \tag{2.10}$$

由于质点组受 m 个完整约束，其约束方程为

$$f_s(x_k, t) = 0 \qquad (s = 1, 2, 3, \cdots, m)$$

那么独立的坐标数目将等于 $n = 3N - m$。于是，选 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 为相应的广义坐标。故质点组中各质点的笛卡尔坐标可表示为

$$x_k = x_k(q_1, q_2, \cdots, q_n, t) \qquad (k = 1, 2, \cdots, 3N)$$

将上式取等时变分得

$$\delta x_k = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial x_k}{\partial q_i}\delta q_i \qquad (k = 1, 2, \cdots, 3N) \tag{2.11}$$

把（2.11）式代入（2.10）式得

$$\sum_{k=1}^{3N}(X_k - m_k\ddot{x}_k)\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial x_k}{\partial q_i}\delta q_i = 0 \tag{2.12}$$

先考察上述方程式中左端的第一项

$$\sum_{k=1}^{3N}X_k\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial x_k}{\partial q_i}\delta q_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{3N}X_k\frac{\partial x_k}{\partial q_i}\right)\delta q_i \tag{2.13}$$

由于广义力的定义得

$$Q_i = \sum_{k=1}^{3N}X_k\frac{\partial x_k}{\partial q_i}$$

称为关于广义坐标 q_i 的广义力。于是，（2.13）式可表示为

$$\sum_{k=1}^{3N}X_k\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial x_k}{\partial q_i}\delta q_i = \sum_{i=1}^{n}Q_i\delta q_i \tag{2.14}$$

其次，考察（2.12）式的第二项

$$-\sum_{k=1}^{3N} m_k \ddot{x}_k \cdot \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial x_k}{\partial q_l} \delta q_l = -\sum_{l=1}^{n} \left[\sum_{k=1}^{3N} m_k \ddot{x}_k \frac{\partial x_k}{\partial q_l} \right] \delta q_l \tag{2.15}$$

由于 $\ddot{x}_k = \frac{d\dot{x}_k}{dt}$ 所以 $m_k \frac{d\dot{x}_k}{dt} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial q_l} = m_k \frac{d}{dt}\left(\dot{x}_k \frac{\partial x_k}{\partial q_l}\right) - m_k \dot{x}_k \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_k}{\partial q_l}\right)$

故（2.15）式可表示为

$$-\sum_{k=1}^{3N} m_k \ddot{x}_k \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial x_k}{\partial q_l} \delta q_l = \sum_{l=1}^{n} \left[\sum_{k=1}^{3N} m_k \dot{x}_k \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_k}{\partial q_l}\right) - \right.$$

$$\left. -\sum_{k=1}^{3N} m_k \frac{d}{dt}\left(\dot{x}_k \frac{\partial x_k}{\partial q_l}\right) \right] \delta q_l \tag{2.16}$$

如果成立这样的关系

$$\frac{\partial x_k}{\partial q_l} = \frac{\partial \dot{x}_k}{\partial \dot{q}_l} \qquad 与 \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_k}{\partial q_l}\right) = \frac{\partial \dot{x}_k}{\partial q_l}$$

那么（2.16）式可表示为

$$-\sum_{k=1}^{3N} m_k \ddot{x}_k \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial x_k}{\partial q_l} \delta q_l = \sum_{l=1}^{n} \left\{ \frac{\partial}{\partial q_l} \left(\sum_{k=1}^{3N} \frac{1}{2} m_k \dot{x}_k^2 \right) - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_l} \left(\sum_{k=1}^{3N} \frac{1}{2} m_k \dot{x}_k^2 \right) \right] \right\} \delta q_l$$

即

$$-\sum_{k=1}^{3N} m_k \ddot{x}_k \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial x_k}{\partial q_l} \delta q_l = \sum_{l=1}^{n} \left[\frac{\partial T}{\partial q_l} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} \right) \right] \delta q_l \tag{2.17}$$

式中 T 表示质点组的动能。把（2.14）式与（2.17）式同时代入（2.12）式便得

$$\sum_{l=1}^{n} \left[Q_l + \frac{\partial T}{\partial q_l} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} \right) \right] \delta q_l = 0 \tag{2.18}$$

由于 q_l 为广义坐标，所以 δq_l 是彼此独立的，因此上式方程所有 δq_l 前面的系数都必须等于零。

即 $\quad Q_l + \frac{\partial T}{\partial q_l} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} \right) = 0$

或

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_l} = Q_l \quad (l = 1, 2, 3, \cdots, n) \tag{2.19}$$

方程组（2.19）就是理想完整的质点组的**第二类拉格朗日方程**，简称**拉格朗日方程**。解这 n 个二阶常微分方程组（加上初始条件）就可确定质点组的运动。

现在，证明（1）$\frac{\partial x_k}{\partial q_l} = \frac{\partial \dot{x}_k}{\partial \dot{q}_l}$

由于 $x_k = x_k(q_l, t)$ 所以 $\dot{x}_k = \frac{dx_k}{dt} = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial x_k}{\partial q_l} \dot{q}_l + \frac{\partial x_k}{\partial t}$

故 $\quad \frac{\partial \dot{x}_k}{\partial \dot{q}_l} = \frac{\partial x_k}{\partial q_l}$ 得证。

其次，证明（2）$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_k}{\partial q_i}\right)=\left(\frac{\partial \dot{x}_k}{\partial q_i}\right)$

由于 $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_k}{\partial q_i}\right)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{\partial x_k}{\partial q_i}\right)\dot{q}_j+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x_k}{\partial q_i}\right)$

交换对 q_i，q_j 的偏导数的次序即得

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_k}{\partial q_i}\right)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\partial x_k}{\partial q_j}\right)\dot{q}_j+\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\partial x_k}{\partial t}\right)$$

由于 i 与对 j 求和无关，上式又可写为

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_k}{\partial q_i}\right)=\frac{\partial}{\partial q_i}\left\{\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial x_k}{\partial q_j}\dot{q}_j+\frac{\partial x_k}{\partial t}\right\}=\frac{\partial \dot{x}_k}{\partial q_i}$$

故 $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_k}{\partial q_i}\right)=\frac{\partial \dot{x}_k}{\partial q_i}$ 得证。

将（2.19）式与牛顿第二定律

$$\mathbf{F}=m\frac{d\mathbf{V}}{dt}=\frac{d}{dt}(m\mathbf{V})$$

相比较，我们称 $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$ 为关于广义坐标 q_i 的**广义动量**，用 $\mathbf{P}_i$ 表示。而 $\dot{q}_i$ 为关于广义坐标 q_i 的**广义速度**。

若我们所研究的质点组为完整保守组，即作用在质点组上的作用力具有势时，那么我们进一步来考察第二类拉格朗日方程的表现形式。在§1—3这一节里，我们曾经建立过保守组的广义力的表示形式，即

$$Q_i=-\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial q_i}$$

因而（2.19）式就可改写为

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}=-\frac{\partial V}{\partial q_i} \tag{2.20}$$

由于 $V=V(q_i,t)$ 即质点组的势能只是广义坐标 q_i 与时间 t 的函数，所以（2.20）式又可表示为

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial(T-V)}{\partial \dot{q}_i}\right]-\frac{\partial(T-V)}{\partial q_i}=0 \quad (i=1,2,3,\cdots,n)$$

令 $T-V=L(q_i,\dot{q}_i,t)$ 称为**拉格朗日函数**，或称**动势**，那么上述式子就可写为更简洁的形式

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0 \quad (i=1,2,3,\cdots,n) \tag{2.21}$$

（2.21）式就称为**完整保守组的拉格朗日方程。**

拉格朗日方程是力学的基本方程，它在分析力学中的地位与作用，相当于牛顿第二定律在牛顿力学中的地位与作用。不过，由于它是从能量的角度出发，采用了广义坐标，因此它不但形式具有不变性，而且应用更为广泛。当然，又由于（2.21）方程中不

出现约束力，因而可以消除由于约束而带来的许多困难。这些都将成为用它来解决动力学问题的最大优点。也正因为如此，它在实用上具有较高的价值。

下面我们通过一些典型的例子来说明拉格朗日方程的应用。

例1. 重为P的平板放在两个滚子上，其重各为p，若在板上加一水平力Q，求板子的加速度。

解： 把两个滚子与平板视为一个系统（即质点组），该系统具有一个自由度，故选平板质心c_3的坐标x_3为广义坐标。因而，系统的动能为

$$T=\frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}J_1\dot{\varphi}_1^2+\frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2+\frac{1}{2}J_2\dot{\varphi}_2^2+\frac{1}{2}m_3\dot{x}_3^2 \qquad (1)$$

式中m_1为c_1滚子的质量，$\dot{x}_1$为c_1滚子质心的速度，J_1为c_1滚子对过质心的转动轴的转动惯量$\dot{\varphi}_1$为c_1滚子的绕过其质心的转动轴的转动角速度；同样m_2、$\dot{x}_2$、J_2、$\dot{\varphi}_2$分别表示c_2滚子的质量、质心速度、转动惯量和转动角速度。m_3为平板的质量，$\dot{x}_3$为

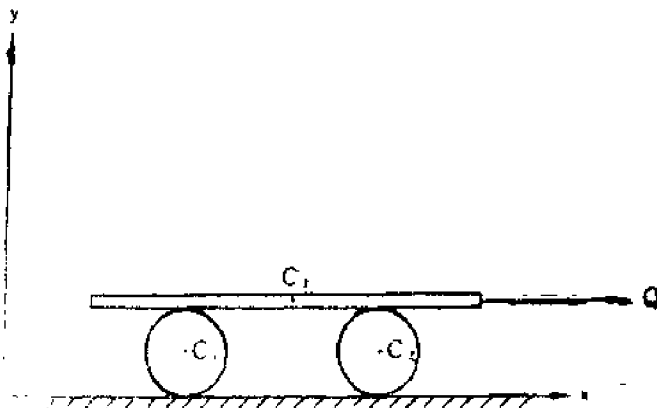


图2.1

平板的质心c_3的速度，

由题给条件得知

$$m_1=m_2=m,\ \dot{x}_1=\dot{x}_2,\ J_1=J_2=\frac{1}{2}mr^2,\ r\dot{\varphi}_1=r\dot{\varphi}_2=\dot{x}_1=\dot{x}_2$$

$$\dot{x}_3=2\dot{x}_1=2\dot{x}_2$$

故（1）式可改写为

$$T=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}m\dot{x}_3^2\right)+\frac{1}{2}m_3\dot{x}_3^2 \qquad (2)$$

即 $$T=\frac{1}{2}\left(\frac{3p+4P}{4g}\right)\dot{x}_3^2 \qquad (3)$$

由于 $$\sum_{k=1}^{3N}X_k\delta x_k=\sum_{l=1}^{s}Q_l\delta q_l$$

故有 $$Q\delta x_3=Q_3\delta x_3$$

即得 $$Q_3=Q \qquad (4)$$

由拉格朗日方程得

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_3}\right)-\frac{\partial T}{\partial x_3}=Q \qquad (5)$$

将（3）式与（4）式同时代入（5）式得

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{x}_3}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3p+4P}{4g}\dot{x}_3^2\right)\right]-\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3p+4P}{4g}\dot{x}_3^2\right)=Q$$

即 $$\frac{3p+4P}{4g}\ddot{x}_3=Q$$

于是 $$\ddot{x}_3=\frac{4Q}{3p+4P}g$$

同理，若选 x_1（或 x_2）为广义坐标，那么系统的动能为

$$T=\frac{1}{2}\left(\frac{3p+4P}{g}\right)\dot{x}_1^2$$

由于 $\dot{x}_3=2\dot{x}_1$ 故有 $x_3=2x_1+c$ 于是 $\delta x_3=2\delta x_1$

因而 $$Q\delta x_3=Q_1\delta x_1=Q_1\cdot\frac{1}{2}\delta x_3$$

故得 $$Q_1=2Q$$

由拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right)-\frac{\partial T}{\partial x_1}=Q_1$$

得 $$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{x}_1}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3p+4P}{g}\dot{x}_1^2\right)\right]-\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3p+4P}{g}\dot{x}_1^2\right)=2Q$$

即 $$\frac{3p+4P}{g}\ddot{x}_1=2Q$$

于是 $$\ddot{x}_1=\frac{2Q}{3p+4P}g$$

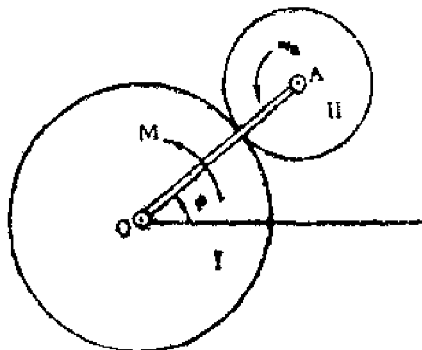


图2.2

例 2．行星齿轮机构如图 2.2 所示，由柄 OA 带动行星齿轮Ⅱ在固定齿轮Ⅰ上滚动。已知曲柄的质量为 m_1，且可认为是匀质杆，齿轮Ⅱ的质量为 m_2 半径为 r 且可认为是匀质圆盘，至于齿轮Ⅰ的半径为 R，今在曲柄上作用一不变的力矩 M，如重力的作用可以略去不计，试用拉格朗日方程研究曲柄的运动。

解：把曲柄与行星齿轮Ⅱ视为一系统（即质点组），它具有一个自由度，故选 φ 为广义坐标。于是，系统的动能为

$$T=\frac{1}{2}J_1\dot{\varphi}^2+\frac{1}{2}m_2v_A^2+\frac{1}{2}J_2\omega_2^2$$

式中 J_1 为曲柄 OA 对过 O 的转动轴的转动惯量，J_2 为齿轮Ⅱ对过 A 且垂直于轮面的转动轴的转动惯量。ω_2 为齿轮Ⅱ对过 A 且垂直于轮面的转动轴的转动角速度，v_A 为 A 点的速度。

由题设的条件得：

$$J_1=\frac{1}{3}m_1(R+r)^2,\ v_A=(R+r)\dot{\varphi},\ J_2=\frac{1}{2}m_2r^2,\ \omega_2=\frac{R+r}{r}\dot{\varphi}$$

故（1）式又可表示为

$$T=\frac{3}{4}m_2(R+r)^2\left(\frac{2}{9}\cdot\frac{m_1}{m_2}+1\right)\dot{\varphi}^2$$

而对应于广义坐标φ的广义力为

$$Q_\varphi=M$$

于是，由拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial T}{\partial\varphi}=Q_\varphi$$

得 $$\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial}{\partial\dot{\varphi}}\left[\frac{3}{4}m_2(R+r)^2\left(\frac{2}{9}\cdot\frac{m_1}{m_2}+1\right)\dot{\varphi}^2\right]\right\}=M$$

即 $$\frac{d}{dt}\left\{\frac{3}{2}m_2(R+r)^2\left(\frac{2}{9}\cdot\frac{m_1}{m_2}+1\right)\dot{\varphi}\right\}=M$$

或 $$\frac{3}{2}m_2(R+r)^2\left(\frac{2}{9}\cdot\frac{m_1}{m_2}+1\right)\ddot{\varphi}=M$$

因此 $$\ddot{\varphi}=\frac{2M}{3m_2(R+r)^2\left(1+\frac{2}{9}\cdot\frac{m_1}{m_2}\right)}$$

例3. 试利用拉格朗日方程导出自由质点在球面坐标系中加速度的表示式。

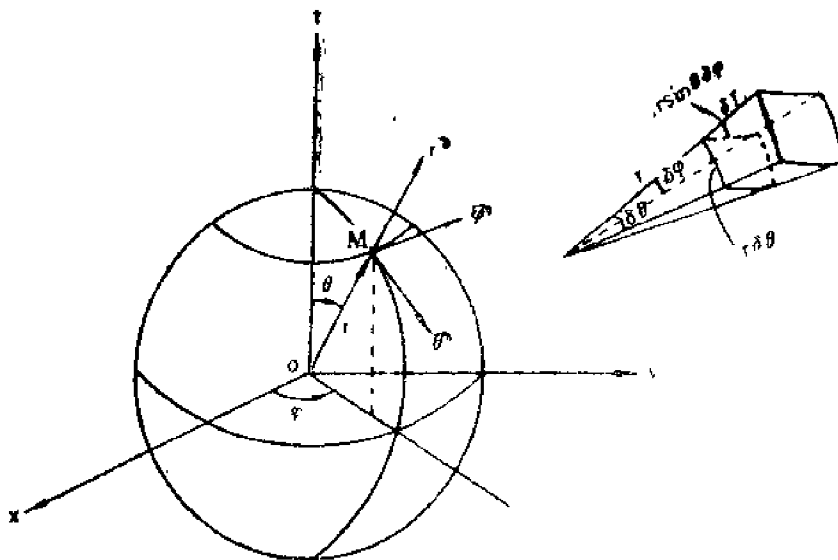


图2.3

解： 由于自由质点 M 具有三个自由度，故选 r、θ、φ 为相应的广义坐标，如图2.3所示。于是，质点 M 的坐标可表为

$$\begin{cases} x=r\sin\theta\cdot\cos\varphi \\ y=r\sin\theta\cdot\sin\varphi \\ z=r\cos\theta \end{cases} \quad (1)$$

其速度分量为

$$
\begin{cases}
\dot{x}=\dot{r}\sin\theta\cos\varphi+r\cos\theta\cdot\cos\varphi\dot{\theta}-r\sin\theta\cdot\sin\varphi\dot{\varphi} \\
\dot{y}=\dot{r}\sin\theta\cdot\sin\varphi+r\cos\theta\cdot\sin\varphi\dot{\theta}+r\sin\theta\cdot\cos\varphi\dot{\varphi} \\
\dot{z}=\dot{r}\cos\theta-r\sin\theta\dot{\theta}
\end{cases} \qquad (2)
$$

故动能为

$$
T=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)
$$

$$
=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2) \qquad (3)
$$

若在迪卡尔坐标下，作用在质点 M上的主动力的分量为 F_r、F_θ、F_φ，而在广义坐标下相应的广义为Q_r、Q_θ、Q_φ时，那么由于

$$
\sum_{k=1}^{3N}X_k\delta x_k=\sum_{l=1}^{s}Q_l\delta q_l \quad (\delta x_k \text{ 与 } \delta q_l \text{ 数目相同})
$$

即 $\quad F_r\delta r+F_\theta(r\delta\theta)+F_\varphi(r\sin\theta\delta\varphi)=Q_r\delta r+Q_\theta\delta\theta+Q_\varphi\delta\varphi$

则 $\quad Q_r=F_r,\ Q_\theta=rF_\theta,\ Q_\varphi=r\sin\theta F_\varphi \qquad (4)$

由拉格朗日方程

$$
q_1=r:\qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{r}}\right)-\frac{\partial T}{\partial r}=Q_r
$$

得 $\quad \frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial}{\partial\dot{r}}\left[\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2)\right]\right\}-\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2\right]=Q_r$

即 $\quad m(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2-r\sin^2\theta\dot{\varphi}^2)=Q_r \qquad (5)$

把（4）式代入（5）式得

$$
m(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2-r\sin^2\theta\dot{\varphi}^2)=F_r
$$

由于 $\quad F_r=ma_r$ 故上述方程可改写为

$$
m(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2-r\sin^2\theta\dot{\varphi}^2)=ma_r
$$

故得：$a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2-r\sin^2\theta\dot{\varphi}^2$

同理，由拉格朗日方程

$$
q_2=\theta:\qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}}\right)-\frac{\partial T}{\partial\theta}=Q_\theta
$$

得：$\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial}{\partial\dot{\theta}}\left[\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2)\right]\right\}-\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2\right]$

$=Q_\theta$

即 $\quad \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta})-mr^2\sin\theta\cdot\cos\theta\dot{\varphi}^2=Q_\theta$

或 $\quad m(2r\dot{r}\dot{\theta}+r^2\ddot{\theta}-r^2\sin\theta\cdot\cos\theta\dot{\varphi}^2)=Q_\theta \qquad (6)$

把（4）式代入（6）式得

$$
m(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}-r\sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2)r=rF_\theta
$$

或 $\quad m(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}-r\sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2)=F_\theta$

由于 $F_\theta=ma_\theta$ 故上述方程可变为

$$m(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}-r\sin\theta\cdot\cos\theta\dot{\varphi}^2)=ma_\theta$$

故有 $a_\theta=r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}-r\sin\theta\cdot\cos\theta\dot{\varphi}^2$

同理，由拉格朗日方程

$$q_3=\varphi: \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial T}{\partial\varphi}=Q\varphi$$

得 $$\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial}{\partial\dot{\varphi}}\left[\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2)\right]\right\}-\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+\right.$$

$$\left.+r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2)\right]=Q\varphi$$

即 $$\frac{d}{dt}(mr^2\sin^2\theta\dot{\varphi})=Q\varphi$$

或 $$m(2r\dot{r}\sin^2\theta\dot{\varphi}+2r^2\sin\theta\cos\theta\dot{\theta}\dot{\varphi}+r^2\sin^2\theta\ddot{\varphi})=Q\varphi \quad (7)$$

把（4）式代入（7）式得：

$$mr\sin\theta(r\sin\theta\ddot{\varphi}+2\sin\theta\dot{r}\dot{\varphi}+2r\cos\theta\dot{\theta}\dot{\varphi})=r\sin\theta F\varphi$$

或 $$m(r\sin\theta\ddot{\varphi}+2\sin\theta\dot{r}\dot{\varphi}+2r\cos\theta\dot{\theta}\dot{\varphi})=F\varphi$$

由于 $F\varphi=ma\varphi$ 故上述方程式可变为

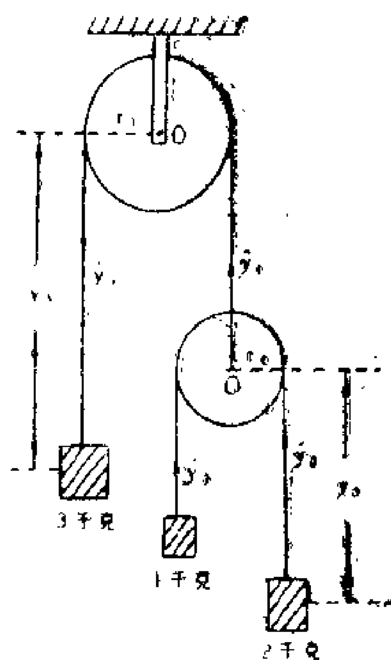
$$m(r\sin\theta\ddot{\varphi}+2\sin\theta\dot{r}\dot{\varphi}+2r\cos\theta\dot{\theta}\dot{\varphi})=ma\varphi$$

故有 $a\varphi=r\sin\theta\ddot{\varphi}+2\sin\theta\dot{r}\dot{\varphi}+2r\cos\theta\dot{\theta}\dot{\varphi}$

例4. 在一固定滑轮上穿一绳，绳的一端挂一重3千克的砝码，另一端挂另一无重的滑轮，在这个滑轮上穿一绳子，绳端分别挂重1千克及2千克的砝码。求重3千克砝码的加速度。

解： 把两个滑轮、绳子以及三个砝码视为一个系统（即质点组）。此系统是具有二个自由度的保守系统。选 y_1，y_2 为广义坐标，如图2.4所示。于是，系统的动能为

$$T=\frac{1}{2}\cdot3\dot{y}_1^2+\frac{1}{2}\cdot2(\dot{y}_1-\dot{y}_2)^2+\frac{1}{2}\cdot1\cdot(\dot{y}_1+\dot{y}_2)^2$$



即 $$T=\frac{3}{2}\dot{y}_1^2+(\dot{y}_1-\dot{y}_2)^2+\frac{1}{2}(\dot{y}_1+\dot{y}_2)^2$$

图2.4

若选 O 点为系统势能的参考点，并设穿过滑轮 O 的绳子的长度为 l_1，穿在滑轮 O' 上的绳子的长度为 l_2 时，那么系统的势能为

$$V=-3gy_1-2g[y_2+(l_1-y_1-\pi r_1)]-g[(l_1-y_1-\pi r_1)+(l_2-y_2-\pi r_2)]$$
$$=-gy_2-3gl_1-gl_2+3g\pi r_1+g\pi r_2$$

于是，系统的拉格朗日函数为

$$L=T-V=\frac{3}{2}\dot{y}_1^2+(\dot{y}_1-\dot{y}_2)^2+\frac{1}{2}(\dot{y}_1+\dot{y}_2)^2+gy_2+3gl_1+gl_2-3g\pi r_1-g\pi r_2$$

或 $$L=\frac{3}{2}\dot{y}_1^2+(\dot{y}_1-\dot{y}_2)^2+\frac{1}{2}(\dot{y}_1+\dot{y}_2)^2+gy_2+常数$$

由拉格朗日方程

$q_1=y_1$： $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_1}\right)-\frac{\partial L}{\partial y_1}=0$$

得 $$\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial}{\partial \dot{y}_1}\left[\frac{3}{2}\dot{y}_1^2+(\dot{y}_1-\dot{y}_2)^2+\frac{1}{2}(\dot{y}_1+\dot{y}_2)^2+gy_2+常数\right]\right\}$$
$$-\frac{\partial}{\partial y_1}\left[\frac{3}{2}\dot{y}_1^2+(\dot{y}_1-\dot{y}_2)^2+\frac{1}{2}(\dot{y}_1+\dot{y}_2)^2+gy_2+常数\right]=0$$

或 $\frac{d}{dt}[6\dot{y}_1-\dot{y}_2]=0$ 即 $6\ddot{y}_1-\ddot{y}_2=0$ （1）

又由拉格朗日方程

$q_2=y_2$： $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_2}\right)-\frac{\partial L}{\partial y_2}=0$$

得 $$\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial}{\partial \dot{y}_2}\left[\frac{3}{2}\dot{y}_1^2+(\dot{y}_1-\dot{y}_2)^2+\frac{1}{2}(\dot{y}_1+\dot{y}_2)^2+gy_2+常数\right]\right\}$$
$$-\frac{\partial}{\partial y_2}\left[\frac{3}{2}\dot{y}_1^2+(\dot{y}_1-\dot{y}_2)^2+\frac{1}{2}(\dot{y}_1+\dot{y}_2)^2+gy_2+常数\right]=0$$

或 $\frac{d}{dt}[-\dot{y}_1+3\dot{y}_2]-g=0$ 即 $3\ddot{y}_2-\ddot{y}_1=g$ （2）

联立（1）式与（2）式解得 $\ddot{y}_1=\frac{1}{17}g$

例5．试用拉格朗日方程导出行星运动的微分方程。

解：由于行星运动所受的力是太阳的吸引力（即为有心力），因此它是作椭圆轨道的平面运动。也就是说，它是具有两个自由度，故选 r、θ 为广义坐标。于是，行星运动的动能为

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)$$

其引力势能为

$$V=-G\frac{mM}{r}$$

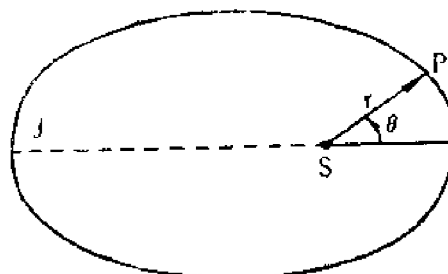


图2.5

式中 m 为行星的质量，M 为太阳的质量，而 r 为行星到太阳的距离。那么拉格朗日函数为

$$L=T-V=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)+G\frac{mM}{r}$$

由拉格朗日方程

$q_1=r$： $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right)-\frac{\partial L}{\partial r}=0$$

得 $$\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial}{\partial \dot{r}}\left[\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)+G\frac{mM}{r}\right]\right\}-\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)+G\frac{mM}{r}\right]=0$$

即 $$\frac{d}{dt}(m\dot{r})-\left(mr\dot{\theta}^2-\frac{GmM}{r^2}\right)=0$$

或 $$m(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)=-\frac{GmM}{r^2} \qquad (1)$$

又由拉格朗日方程

$$q_2=\theta: \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right)-\frac{\partial L}{\partial\theta}=0$$

得 $$\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial}{\partial\dot{\theta}}\left(\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)+\frac{GmM}{r}\right)\right\}-\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)+\frac{GmM}{r}\right]=0$$

即 $$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta})=0 \quad 或 \quad r^2\dot{\theta}=常数 \qquad (2)$$

于是，行星运动的微分方程为

$$\begin{cases} m(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)=-\dfrac{GmM}{r^2} \\ r^2\dot{\theta}=常数 \end{cases}$$

例6. 质量为m_1的质点被限制在水平固定的光滑直线ox上滑动，另一质量为m_2的质点以一长为l的无质量的杆和m_1相联。设杆仅能在通过固定直线的铅直平面内运动，并设二质点仅受重力作用。试用拉格朗日方程确定此质点系的运动遵循如下规律：

$$(m_1+m_2)\dot{x}-m_2 l\sin\varphi\,\dot{\varphi}=c$$

上式中c为常数，并解释其物理意义。

解：此系统是具有二个自由度的保守系，故选x，φ为广义坐标。于是，质点m_1的坐标为$(x, 0)$；质点m_2的坐标为

$$\begin{cases} x_2=x+l\cos\varphi \\ y_2=l\sin\varphi \end{cases}$$

故 $$\begin{cases} \dot{x}_2=\dot{x}-l\sin\varphi\,\dot{\varphi} \\ \dot{y}_2=l\cos\varphi\,\dot{\varphi} \end{cases}$$

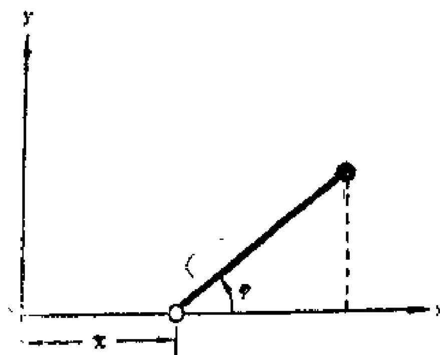


图2.6

因此，系统的动能为

$$T=\frac{1}{2}m_1\dot{x}^2+\frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2+\dot{y}_2^2)$$
$$=\frac{1}{2}m_1\dot{x}^2+\frac{1}{2}m_2[(\dot{x}-l\sin\varphi\,\dot{\varphi})^2+(l\cos\varphi\,\dot{\varphi})^2]$$

而系统的势能为

$$V=m_2 gl\sin\varphi$$ （选水平轴x为势能的参考位置）。

于是，系统的拉格朗日函数为

$$L=T-V=\frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{x}^2+\frac{1}{2}m_2 l^2\dot{\varphi}^2-m_2 l\sin\varphi\,\dot{x}\dot{\varphi}-m_2 gl\sin\varphi$$

由拉格朗日方程

$q_1 = x$:　　$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$

得　$\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial}{\partial \dot{x}}\left[\frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2 l^2\dot{\varphi}^2 - m_2 l\sin\varphi\,\dot{x}\dot{\varphi} - m_2 g l\sin\varphi\right]\right\}=0$

或　$\frac{d}{dt}[(m_1+m_2)\dot{x} - m_2 l\sin\varphi\,\dot{\varphi}]=0$

故　$(m_1+m_2)\dot{x} - m_2 l\sin\varphi\,\dot{\varphi} = c$（常数）　　（1）

由于广义动量的定义

$$P_x = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$$

因此　$(m_1+m_2)\dot{x} - m_2 l\sin\varphi\,\dot{\varphi} = c$　便是 $P_x = c$ 即意味着系统在水平方向上的动量守恒。

例7. 矩形薄片，宽为 b 长为 h，能绕在该薄片平面内通过薄片中心而与 h 边平行之铅垂轴 AB 不受摩擦而转动。轴的一端 B 上套一半径为 r 的滑轮 c，其上绕一柔软而不可伸长的绳子；此绳绕过一个与此滑轮同水平的滑轮 D，绳端悬一重物 P。此重物带动薄片而转动。试求重物 P 的运动规律。设薄片重量等于 Q，重物初速等于零。并且运动未受任何阻力。

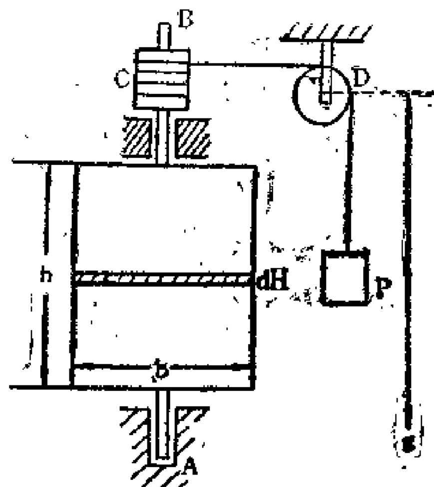


图2.7

解：把重物 P、薄片 Q、滑轮 C、D、绳子等视为一个系统（即质点组），此系统是只有一个自由度的保守系，故选重物的坐标 x 为广义坐标。于是，系统的动能为

$$T = \frac{1}{2}\cdot\frac{P}{g}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2 \qquad (1)$$

式中 J 为薄片对 AB 转轴的转动惯量，$\dot{\varphi}$ 为薄片绕 AB 轴的转动角速度。若设薄片的密度为 ρ，那么

$$J = \int_0^h \frac{1}{12}\rho b\,dH\cdot b^2 = \int_0^h \frac{1}{12}\rho b^3\,dH = \int_0^h \frac{1}{12}\cdot\frac{Q}{gbh}b^3\,dH = \frac{1}{12}\cdot\frac{Q}{g}b^2 \qquad (2)$$

又由题给条件得

$$\dot{x} = r\dot{\varphi}\ （绳子与滑轮之间没相对滑动，绳子又不可伸长） \qquad (3)$$

把（2）式与（3）式同时代入（1）式即得

$$T = \frac{1}{2g}\left(P + \frac{1}{12}\cdot\frac{Qb^2}{r^2}\right)\dot{x}^2 \qquad (4)$$

若选滑轮 D 的水平轴为系统势能的参考位置时，那么系统的势能为

$$V = -Px + 常数（此常数为薄片的重力势能） \qquad (5)$$

于是，系统的拉格朗日函数为

$$L=T-V=\frac{1}{2g}\left(P+\frac{1}{12}\cdot\frac{Qb^2}{r^2}\right)\dot{x}^2+Px$$

由拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial L}{\partial x}=0$$

得 $$\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial}{\partial \dot{x}}\left[\frac{1}{2g}\left(P+\frac{1}{12}\cdot\frac{Qb^2}{r^2}\right)\dot{x}^2+Px\right]\right\}-\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{2g}\left(P+\frac{1}{12}\cdot\frac{Qb^2}{r^2}\right)\dot{x}^2+Px\right]=0$$

即 $$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{g}\left(P+\frac{1}{12}\cdot\frac{Qb^2}{r^2}\right)\dot{x}\right]-P=0$$

或 $$\frac{1}{g}\left(P+\frac{1}{12}\cdot\frac{Qb^2}{r^2}\right)\ddot{x}-P=0$$

于是 $$\ddot{x}=\frac{Pg}{P+\frac{1}{12}\cdot\frac{Qb^2}{r^2}}$$

若令 $K=\frac{b^2}{12}$ （K 为薄片对 AB 轴的回转半径）时，那么便得

$$\ddot{x}=\frac{Pr^2g}{Pr^2+QK^2}$$

例8. 一个质量为 m 的空心园柱，受重力 mg 的作用，沿着一个质量为 M 的三角楔体的斜面上滚动而无滑动。而三角楔体的底面在水平桌面上没摩擦的滑动。设楔体的斜面与水平面的夹角为 θ，园柱的半径为 R。求：

（a）楔体的加速度；

（b）如果园柱在楔体上从距离桌面高为 h 的地方开始，那么当空心园柱到达桌面以后楔体的速度是多少？

解：建立如图 2.8 所示的坐标系：

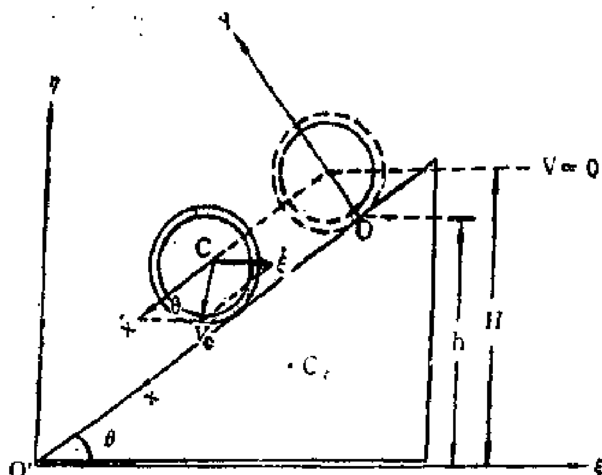


图2.8

固联在斜面上的 oxy 为运动坐标系；固联在桌面上的 $o'\xi\eta$ 为固定坐标系。原点 o 为空心园柱开始时接触点的位置；原点 o' 为楔体开始时在桌面上端点的位置。因此，空心园

柱质心 c 在 oxy 坐标系中的坐标为（x,R），而三角楔体质心 c' 在 $o'\xi\eta$ 坐标系中的坐标为（ξ,η）。

若把三角楔体与空心园柱视为一个系统，那么此系统为二个自由度的保守系。故选 x,ξ 为相应的广义坐标。由图 2.8 所示得知：空心园柱质心 c 的速度为

$$V_c=\sqrt{\dot{x}^2-2\dot{x}\dot{\xi}\cos\theta+\dot{\xi}^2}$$

于是，系统的动能为

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2-2\dot{x}\dot{\xi}\cos\theta+\dot{\xi}^2)+\frac{1}{2}J_c\dot{\varphi}^2+\frac{1}{2}M\dot{\xi}^2 \qquad (1)$$

式中 J_c 为空心园柱对过质心 c 的几何对称轴的转动惯量，$\dot{\varphi}$ 为绕其几何对称轴转动的角速度。由于空心园柱在斜面上作无滑动的滚动，所以 $\dot{x}=R\dot{\varphi}$ 又 $J_c=mR^2$ 因此（1）式又可表示为

$$T=\frac{1}{2}m(2\dot{x}^2-2\dot{x}\dot{\xi}\cos\theta+\dot{\xi}^2)+\frac{1}{2}M\dot{\xi}^2 \qquad (2)$$

若选取空心园柱质心 c 的开始位置（即离水平桌面高为 H）为势能的参考点时，那么系统的势能为

$$V=-mgx\sin\theta-Mg(H-\eta) \qquad (3)$$

故系统的拉格朗日函数为

$$L=T-V=\frac{1}{2}m(2\dot{x}^2-2\dot{x}\dot{\xi}\cos\theta+\dot{\xi}^2)+\frac{1}{2}M\dot{\xi}^2+mgx\sin\theta+\text{常数}$$

于是，$\dfrac{\partial L}{\partial\dot{x}}=2m\dot{x}-m\dot{\xi}\cos\theta,\qquad \dfrac{\partial L}{\partial x}=mg\sin\theta$

$\dfrac{\partial L}{\partial\dot{\xi}}=(m+M)\dot{\xi}-m\dot{x}\cos\theta,\qquad \dfrac{\partial L}{\partial\xi}=0$

因此，由拉格朗日方程

$q_1=x$：$\qquad \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial\dot{x}}\right)-\dfrac{\partial L}{\partial x}=0$

得 $\qquad 2m\ddot{x}-m\cos\theta\ddot{\xi}-mg\sin\theta=0 \qquad (4)$

又由拉格朗日方程

$q_2=\xi$：$\qquad \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial\dot{\xi}}\right)-\dfrac{\partial L}{\partial\xi}=0$

得 $\qquad (m+M)\ddot{\xi}-m\cos\theta\ddot{x}=0 \qquad (5)$

化（5）式得 $\qquad \ddot{\xi}=\dfrac{m\cos\theta}{m+M}\ddot{x} \qquad (6)$

把（6）式代入（4）式得：

$$2m\ddot{x}-m\cos\theta\cdot\frac{m\cos\theta}{m+M}\ddot{x}-mg\sin\theta=0$$

即

$$\frac{2(m+M)-m\cos^2\theta}{m+M}\ddot{x}=g\sin\theta$$

或 $$\ddot{x}=\frac{(m+M)\sin\theta}{2(m+M)-m\cos^2\theta}g \qquad (7)$$

把（7）式代入（6）式得

$$\ddot{\xi}=\frac{m\sin\theta\cdot\cos\theta}{2(m+M)-m\cos^2\theta}\cdot g \qquad (8)$$

由于 $\ddot{x}=\frac{d\dot{x}}{dt}=\frac{d\dot{x}}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=\dot{x}\frac{d\dot{x}}{dx}$

所以 $\dot{x}d\dot{x}=\ddot{x}dx$

即 $$\int_0^{\dot{x}}\dot{x}d\dot{x}=\int_0^{\frac{h}{\sin\theta}}\frac{(m+M)\sin\theta}{2(m+M)-m\cos^2\theta}gdx$$

故得 $$\frac{1}{2}\dot{x}^2=\frac{(m+M)\sin\theta\cdot g}{2(m+M)-m\cos^2\theta}\cdot\frac{h}{\sin\theta}$$

或 $$\dot{x}=\sqrt{\frac{2(m+M)gh}{2(m+M)-m\cos^2\theta}} \qquad (9)$$

将（6）式积分一次可得

$$\dot{\xi}=\frac{m\cos\theta}{m+M}\dot{x}+c$$

式中 c 为积分常数。

因为 $t=0$ 时，$\dot{x}=0$，$\dot{\xi}=0$，所以 $c=0$

于是 $$\dot{\xi}=\frac{m\cos\theta}{m+M}\dot{x}$$

因此，当空心圆柱从离水平桌面高为 h 处开始沿斜面滚下到达水平桌面时，三角楔体获得的速度为

$$\dot{\xi}=\frac{m\cos\theta}{m+M}\dot{x}=\frac{m\cos\theta}{m+M}\sqrt{\frac{2(m+M)gh}{2(m+M)-m\cos^2\theta}}$$

例9. 质量为 m 的圆柱体 S 放在质量为 M 的圆柱体 P 上滚动，而 P 则放在粗糙平面上。已知两圆柱的轴都是水平的，且重心在同一竖直面内，开始时此系统是静止的。若以圆柱体 P 的重心的初始位置为固定坐标的原点，则圆柱 S 的重心在任意时刻的坐标为

$$x=c\cdot\frac{m\theta+(3M+m)\sin\theta}{3(M+m)}$$

$$y=c\cos\theta$$

试用拉格朗日方程证明之，式中 c 为两圆柱轴线间的距离，θ 为两圆柱联心线与竖直方向上的直线间的夹角。

证明：选如图 2.9 所示的坐标系，即 oxy 为固定坐标系，原点 o 为 P 圆柱的质心 A 开始时刻的位置。那么，P 圆柱质心 A 的坐标为 (x_0, o)；S 圆柱质心 B 的坐标为 (x, y)。由图示可得：

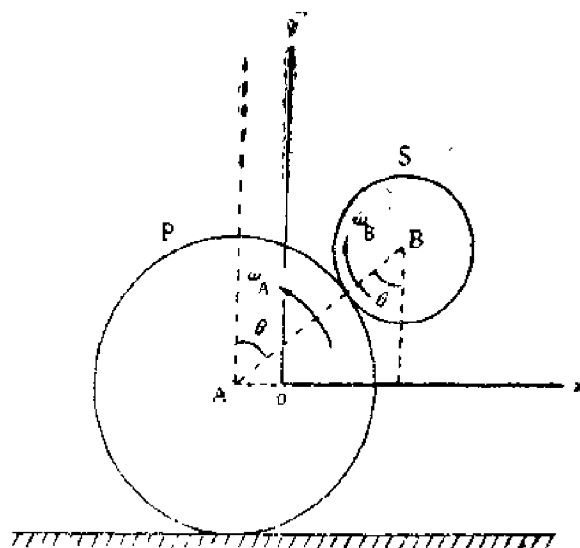


图 2.9

$$\begin{cases} x_c = c\sin\theta - x \\ y = c\cos\theta \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x = c\sin\theta - x_c \\ y = c\cos\theta \end{cases}$$

若把两个园柱视为一个系统，显然此系统为具有二个自由度的保守系（因为两个园柱均作无滑动的滚动，所以摩擦力不作功）。故选 x_c 与 θ 为相应的广义坐标。于是，系统的动能为

$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}_c^2 + \frac{1}{2}J_A\omega_A^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}J_B\omega_B^2 \qquad (1)$$

式中 J_A 为 P 园柱对过其质心 A 且垂直纸面的几何对称轴的转动惯量，ω_A 为其对过质心 A 且垂直纸面的几何对称轴的转动角速度；J_B 为 S 园柱对过其质心 B 且垂直纸面的几何对称轴的转动惯量，ω_B 为其对过质心 B 且垂直纸面的几何对称轴的转动角速度。

由于 P 园柱在粗糙的平面上作纯滚动，故有 $\dot{x}_c = \omega_A R$（R 为 P 园柱的半径）。同理，由于园柱体 S 是在园柱体 P 上作纯滚动，所以有如下的弧长关系：

$$R(\omega_A t + \theta) = r(\omega_B t - \theta)$$

即 $$(r\omega_B - R\omega_A)t = (R + r)\theta$$

从而 $$r\omega_B - R\omega_A = c\dot{\theta}$$

或 $$r\omega_B = \dot{x}_c + c\dot{\theta}$$

式中 r 为 S 园柱的半径。又 $J_A = \frac{1}{2}MR^2$，$J_B = \frac{1}{2}mr^2$ 所以（1）式又可改写为

$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}_c^2 + \frac{1}{4}M\dot{x}_c^2 + \frac{1}{2}m[(c\cos\theta\dot{\theta} - \dot{x}_c)^2 + c^2\sin^2\theta\dot{\theta}^2] + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}mr^2\cdot\frac{(\dot{x}_c + c\dot{\theta})^2}{r^2}$$

$$= \frac{3}{4}(M + m)\dot{x}_c^2 + \frac{3}{4}mc^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mc(1 - 2\cos\theta)\dot{\theta}\dot{x}_c \qquad (2)$$

若选x轴为系统势能的参考位置，那么系统的势能为

$$V=mgy=mgc\cos\theta$$

于是，系统的拉格朗日函数为

$$L=T-V=\frac{3}{4}(M+m)\dot{x}_C^2+\frac{3}{4}mc^2\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}mc(1-2\cos\theta)\dot{\theta}\dot{x}_c-mgc\cos\theta$$

故有：
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_c}=\frac{3}{4}(M+m)\cdot 2\dot{x}_c+\frac{1}{2}mc(1-2\cos\theta)\dot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_c}=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}=\frac{3}{4}mc^2\cdot 2\dot{\theta}+\frac{1}{2}mc(1-2\cos\theta)\dot{x}_c$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta}=mc\sin\theta\dot{\theta}\dot{x}_c+mgc\sin\theta$$

因此，由拉格朗日方程

$q_1=x_C$: $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_c}\right)-\frac{\partial L}{\partial x_C}=0$$

得 $$\frac{d}{dt}\left[\frac{3}{2}(M+m)\dot{x}_C+\frac{1}{2}mc(1-2\cos\theta)\dot{\theta}\right]=0$$

即 $$\frac{3}{2}(M+m)\dot{x}_c+\frac{1}{2}mc(1-2\cos\theta)\dot{\theta}=c_1\text{（常数）} \qquad (3)$$

由题设得知：$t=0$时，$\dot{\theta}=0$，$\dot{x}_C=0$，故$c_1=0$。于是，（3）式又可写为：

$$\frac{3}{2}(M+m)\dot{x}_c+\frac{1}{2}mc(1-2\cos\theta)\dot{\theta}=0 \qquad (4)$$

把 $\dot{x}_c=c\cos\theta\dot{\theta}-\dot{x}$ 代入（4）式即得

$$\frac{3}{2}(M+m)(c\cos\theta\dot{\theta}-\dot{x})+\frac{1}{2}mc(1-2\cos\theta)\dot{\theta}=0$$

故有 $$\left[\frac{3}{2}\left(M+\frac{1}{3}m\right)c\cos\theta+\frac{1}{2}mc\right]\dot{\theta}=\frac{3}{2}(M+m)\dot{x}$$

因而 $$\int_0^\theta\left[\frac{3}{2}\left(M+\frac{1}{3}m\right)c\cos\theta+\frac{1}{2}mc\right]d\theta=\int_0^x\frac{3}{2}(M+m)dx$$

即得 $$\frac{3}{2}\left(M+\frac{1}{3}m\right)c\sin\theta+\frac{1}{2}mc\theta=\frac{3}{2}(M+m)x$$

或者 $$\frac{c}{3}[(3M+m)\sin\theta+m\theta]=(M+m)x$$

因此 $$x=c\cdot\frac{m\theta+(3M+m)\sin\theta}{3(M+m)}$$

而前面已经得到 $y=c\cdot\cos\theta$，故B点（即园柱S的质心）的坐标所满足的关系式得证。

例10. 质量为M、半径为a的薄球壳，其外表面是完全粗糙的，内表面则完全光滑，放在粗糙水平桌面上。在球壳内放一质量为m、长为$2a\sin\alpha$的均质棒，设此系由静止开始运动，且在开始的瞬间，棒在通过球心的竖直平面内，两端都与球壳相接触，并与水平线成β角，试用拉格朗日方程证明在以后的运动中，此棒与水平线所夹之角θ满足关系：

$$[(5M+3m)(3\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)-9m\cos^2\alpha\cdot\cos^2\theta]a\dot{\theta}^2=6g(5M+3m)(\cos\theta-\cos\beta)\cos\alpha$$

证：选取如图2.10所示的xoy坐标系为固定坐标系。那么，球壳的质心 C 的坐标为（x_c，a）；棒的质心C_1的坐标为

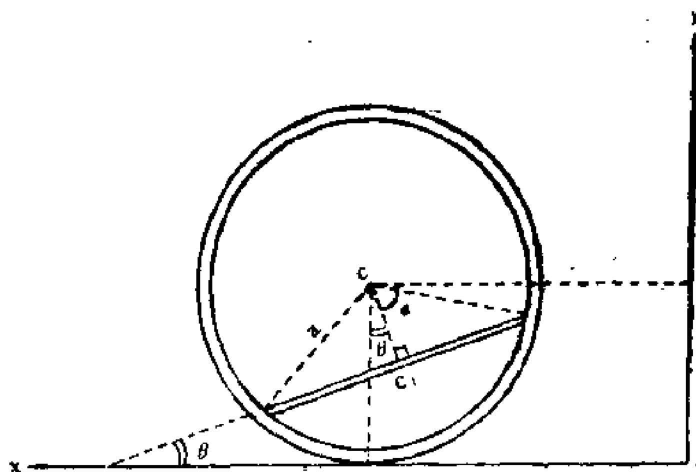


图2.10

$$\begin{cases} x_{c1}=x_c-a\cos\alpha\cdot\sin\theta \\ y_{c1}=a-a\cos\alpha\cdot\cos\theta \end{cases}$$

显然，棒与球壳所组成的系统为两个自由度的保守系（因球壳在水平桌面上作无滑动的滚动，所以摩擦力不作功）。故选x_c与θ为相应的广义坐标。于是，系统的动能为

$$T=\frac{1}{2}M\dot{x}_c^2+\frac{1}{2}J_c\omega_c^2+\frac{1}{2}m(\dot{x}_{c1}^2+\dot{y}_{c1}^2)+\frac{1}{2}J_{c1}\dot{\theta}^2$$

式中J_c为球壳对过球心 C 的转轴的转动惯量，ω_c 为其对过球心C的转轴的转动角速度；J_{c1}为棒对过其质心C_1而垂直此棒的轴的转动惯量，$\dot{\theta}$为其绕该轴转动的角速度。

由于 $J_c=\frac{2}{3}Ma^2$，$J_{c1}=\frac{1}{12}m(2a\sin\alpha)^2$，$\dot{x}_c=a\omega_c$所以，系统的动能又可写为

$$T=\frac{1}{2}M\dot{x}_c^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}Ma^2\cdot\left(\frac{\dot{x}_c}{a}\right)^2+\frac{1}{2}m[(\dot{x}_c-a\cos\alpha\cdot\cos\theta\,\dot{\theta})^2+a^2\cos^2\alpha\cdot\sin^2\theta\dot{\theta}^2]$$

$$+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12}m(2a\cdot\sin\alpha)^2\dot{\theta}^2=\frac{1}{2}\left(\frac{5}{3}M+m\right)\dot{x}_c^2+\frac{1}{2}ma^2\left(\cos^2\alpha+\frac{1}{3}\sin^2\alpha\right)\dot{\theta}^2-$$

$$-ma\cos\alpha\cdot\cos\theta\dot{\theta}\dot{x}_c$$

若选水平桌面为势能的参考位置时，那么系统的势能为

$$V=Mgy_c+mgy_{c1}=Mga+mg(a-a\cos\alpha\cdot\cos\theta)$$

于是，系统的拉格朗日函数为

$$L=T-V=\frac{1}{2}\left(\frac{5}{3}M+m\right)\dot{x}_c^2+\frac{1}{2}ma^2\left(\cos^2\alpha+\frac{1}{3}\sin^2\alpha\right)\dot{\theta}^2-ma\cos\alpha\cdot\cos\theta\dot{\theta}\dot{x}_c-Mga-$$

$$-mg(a-a\cos\alpha\cdot\cos\theta)$$

因此，由拉格朗日方程

$q_1 = x_c$，　$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_c}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_c} = 0$

得　$\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{5}{3}M+m\right)\dot{x}_c - ma\cos\alpha \cdot \cos\theta\dot{\theta}\right] = 0$

或　$\left(\frac{5}{3}M+m\right)\ddot{x}_c - ma\cdot\cos\alpha\cdot\cos\theta\ddot{\theta} + ma\cdot\cos\alpha\cdot\sin\theta\dot{\theta}^2 = 0$

故有　$\ddot{x}_c = \frac{ma\cos\alpha}{\left(\frac{5}{3}M+m\right)}\left(\cos\theta\ddot{\theta} - \sin\theta\dot{\theta}^2\right)$　（1）

又由拉格朗日方程

$q_2 = \theta$，　$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$

得$\frac{d}{dt}\left[ma^2\left(\cos^2\alpha + \frac{1}{3}\sin^2\alpha\right)\dot{\theta} - ma\cos\alpha\cdot\cos\theta\dot{x}_c\right] - ma\cdot\cos\alpha\sin\theta\dot{\theta}\dot{x}_c +$

$+ mga\cos\alpha\cdot\sin\theta = 0$

或　$ma^2\left(\cos^2\alpha + \frac{1}{3}\sin^2\alpha\right)\ddot{\theta} + ma\cos\alpha\cdot\sin\theta\dot{\theta}\dot{x}_c - ma\cos\alpha\cdot\cos\theta\ddot{x}_c - ma\cos\alpha\sin\theta\dot{\theta}\dot{x}_c +$

$+ mga\cos\alpha\cdot\sin\theta = 0$

故有　$ma^2\left(\cos^2\alpha + \frac{1}{3}\sin^2\alpha\right)\ddot{\theta} - ma\cos\alpha\cdot\cos\theta\ddot{x}_c + mga\cos\alpha\sin\theta = 0$　（2）

把（1）式代入（2）式并经整理得

$$\frac{ma}{3(5M+3m)}\left\{\left[a(3\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)(5M+3m) - 9ma\cos^2\alpha\cos^2\theta\right]\ddot{\theta} + \right.$$
$$\left. + 9ma\cos^2\alpha\cdot\cos\theta\cdot\sin\theta\dot{\theta}^2 + 3(5M+3m)g\cos\alpha\cdot\sin\theta\right\} = 0$$

即$[(3\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)(5M+3m) - 9m\cos^2\alpha\cos^2\theta]a\ddot{\theta} + 9ma\cos^2\alpha\cdot\cos\theta\cdot\sin\theta\dot{\theta}^2 +$

$+3(5M+3m)g\cos\alpha\cdot\sin\theta = 0$

于是，$\frac{d}{d\theta}\left\{\frac{1}{2}[(3\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)(5M+3m) - 9m\cos^2\alpha\cos^2\theta]a\dot{\theta}^2\right\}$

$= -3(5M+3m)g\cos\alpha\cdot\sin\theta$

也即$\int d\left\{\frac{1}{2}\left[(3\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)(5M+3m) - 9m\cos^2\alpha\cdot\cos^2\theta\right]a\dot{\theta}^2\right\}$

$= \int -3(5M+3m)g\cos\alpha\cdot\sin\theta d\theta$

所以，$\frac{1}{2}\left[(3\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)(5M+3m) - 9m\cos^2\alpha\cos^2\theta\right]a\dot{\theta}^2$

$= 3(5M+3m)g\cos\alpha\cdot\cos\theta + D$

式中D为积分常数。当$t=0$时，$\theta=\beta$，$\dot{\theta}=0$，

故有　$D = -3(5M+3m)g\cos\alpha\cdot\cos\beta$

于是，$\frac{1}{2}\left[(3\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)(5M+3m) - 9m\cos^2\alpha\cos^2\theta\right]a\dot{\theta}^2 =$

$$=3(5M+3m)g\cos\alpha(\cos\theta-\cos\beta)$$

故 $$[(5M+3m)(3\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)-9m\cos^2\alpha\cdot\cos^2\theta]a\dot{\theta}^2=$$

$$=6g(5M+3m)(\cos\theta-\cos\beta)\cos\alpha$$

得证。

例11. 一个质量为m的质点沿一光滑的斜面滑动，此斜面的倾角θ的增加率ω为常数。如果$t=0$时，$\theta=0$，此时质点从静止出发，求质点后来的运动。

解： 选如图2.11所示的平面极坐标系，显然此质点具有二个自由度，故选r，θ为相应的广义坐标。于是，质点m的动能为

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)$$

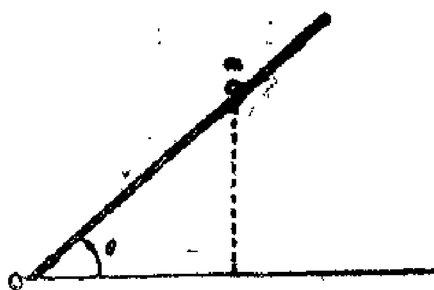


图 2.11

由于题给条件得

$$\dot{\theta}=\omega=\text{常数}$$

故上述动能表示式可改写

为 $$T=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+\omega^2r^2)$$

若选水平位置为势能的参考位置时，质点的势能为

$$V=mgr\sin\theta$$

于是，质点的拉格朗日函数为

$$L=T-V=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+\omega^2r^2)-mgr\sin\theta$$

由拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{r}}\right)-\frac{\partial L}{\partial r}=0$$

得 $$m\ddot{r}-m\omega^2r+mg\sin\theta=0$$

即 $$\ddot{r}-\omega^2r=-g\sin\theta \tag{1}$$

由题给条件得 $\theta=\omega t$，故（1）式又可改写为

$$\ddot{r}-\omega^2r=-g\sin\omega t \tag{2}$$

对应齐次方程 $\ddot{r}-\omega^2r=0$ 的特征方程为

$$\lambda^2-\omega^2=0$$

故得 $$\lambda=\pm\omega$$

于是，齐次方程的通解为

$$r^*=c_1e^{\omega t}+c_2e^{-\omega t}$$

式中c_1，c_2为积分常数。由于$\alpha=i\omega$不为特征根，所以非齐次方程的一个特解为

$$r^{**}=A\sin\omega t$$

把此特解代入原方程（2）并比较其相应项的系数便得

$$A=\frac{g}{2\omega^2}$$

因此，非齐次微分方程（2）的通解为

$$r=c_1e^{\omega t}+c_2e^{-\omega t}+\frac{g}{2\omega^2}\sin\omega t \tag{3}$$

当$t=0$时，$r=r_0$，$\dot{r}=0$ 得

$$\begin{cases} c_1+c_2=r_0 & (4)\\ c_1-c_2=-\dfrac{g}{2\omega^2} & (5)\end{cases}$$

联立（4）代与（5）式解得

$$\begin{cases} c_1=\dfrac{1}{2}r_0-\dfrac{g}{4\omega^2} & (6)\\ c_2=\dfrac{1}{2}r_0+\dfrac{g}{4\omega^2} & (7)\end{cases}$$

将（6）式与（7）式同时代入（3）式便得

$$r=\left(\frac{1}{2}r_0-\frac{g}{4\omega^2}\right)e^{\omega t}+\left(\frac{1}{2}r_0+\frac{g}{4\omega^2}\right)e^{-\omega t}+\frac{g}{2\omega^2}\sin\omega t$$

$$=\frac{1}{2}r_0\left(e^{\omega t}+e^{-\omega t}\right)-\frac{g}{2\omega^2}\cdot\frac{1}{2}\left(e^{\omega t}-e^{-\omega t}\right)+\frac{g}{2\omega^2}\sin\omega t$$

$$=r_0\,\mathrm{ch}\,\omega t+\frac{g}{2\omega^2}(\sin\omega t-\mathrm{sh}\,\omega t)$$

例12. 试证拉格朗日函数$L=\frac{1}{2}mv^2-q\varphi+q\mathbf{V}\cdot\mathbf{A}$对于一个质点在电磁场中运动的程为方程

$$m\ddot{\mathbf{r}}=g(\mathbf{E}+\mathbf{V}\times\mathbf{B})$$

上式中$\mathbf{E}=-\nabla\varphi$和$\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}$（矢量$\mathbf{A}$称为矢势，标量$\varphi$称为标势）。

证：若选x，y，z为广义坐标时，那么

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)-q\varphi(x,y,z)+q[\dot{x}A_x(x,y,z)+\dot{y}A_y(x,y,z)+\dot{z}A_z(x,y,z)]$$

由拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\right)-\frac{\partial L}{\partial x}=0$$

得
$$\frac{d}{dt}\left[m\dot{x}+qA_x(x,y,z)\right]+q\frac{\partial\varphi}{\partial x}-q\left[\dot{x}\frac{\partial A_x}{\partial x}+\dot{y}\frac{\partial A_y}{\partial x}+\dot{z}\frac{\partial A_z}{\partial x}\right]=0$$

即
$$m\ddot{x}+q\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial A_x}{\partial y}\dot{y}+\frac{\partial A_x}{\partial z}\dot{z}\right)+q\frac{\partial\varphi}{\partial x}-q\left[\dot{x}\frac{\partial A_x}{\partial x}+\dot{y}\frac{\partial A_y}{\partial x}+\dot{z}\frac{\partial A_z}{\partial x}\right]=0$$

或
$$m\ddot{x}=-q\frac{\partial\varphi}{\partial x}+q\left[\dot{y}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)-\dot{z}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\right] \tag{1}$$

同理，由拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{y}}\right)-\frac{\partial L}{\partial y}=0$$

得 $$m\ddot{y}=-q\frac{\partial\varphi}{\partial y}+q\left[\dot{z}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)-\dot{x}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\right] \quad (2)$$

同理，由拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right)-\frac{\partial L}{\partial z}=0$$

得 $$m\ddot{z}=-q\frac{\partial\varphi}{\partial z}+q\left[\dot{x}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)-\dot{y}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\right] \quad (3)$$

将（1）式乘上**i**，（2）式乘上**j**，（3）式乘上**k**，然后相加得

$$m(\ddot{x}\,\mathbf{i}+\ddot{y}\,\mathbf{j}+\ddot{z}\,\mathbf{k})=-q\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathbf{k}\right)+$$

$$+q\left\{\left[\dot{y}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)-\dot{z}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\right]\mathbf{i}+\left[\dot{z}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\dot{x}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\right]\mathbf{j}+\left[\dot{x}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)-\dot{y}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\right]\mathbf{k}\right\} \quad (4)$$

若令：$\mathbf{E}=-\nabla\varphi=-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathbf{k}\right)$

$$\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}=\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\mathbf{i}+\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\mathbf{j}+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

$$\ddot{\mathbf{r}}=\ddot{x}\,\mathbf{i}+\ddot{y}\,\mathbf{j}+\ddot{z}\,\mathbf{k}$$

$$V=\dot{x}\mathbf{i}+\dot{y}\mathbf{j}+\dot{z}\mathbf{k}$$

那么，（4）式就可改写为

$$m\ddot{\mathbf{r}}=q(\mathbf{E}+V\times\mathbf{B})$$

故得证。

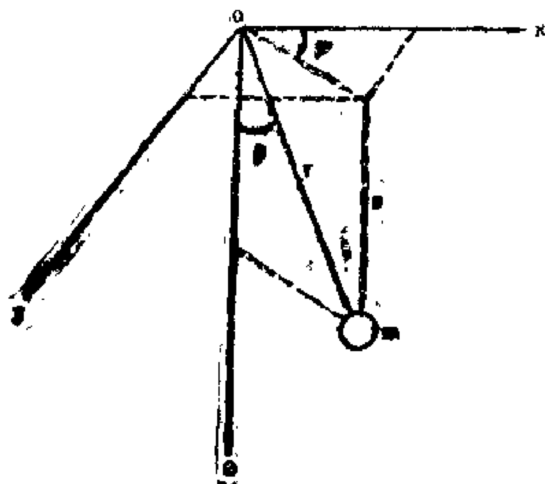


图2.12

例13． 试用拉格朗日方程求在球面坐标中的弹性球面摆的运动微分方程。

解： 选如图2.12所示的坐标系，由于弹性球面摆具有三个自由度，故选 r，θ，φ 为相应的广义坐标。于是，弹性球面摆的动能为

$$T=\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2\right)$$

式中m为弹性球面摆的质量。

若选 oxy 平面为势能的参考面时，那么弹性球面摆的势能为

$$V=-mgz+\frac{1}{2}k(r-l_0)^2=-mgr\cos\theta+\frac{1}{2}k(r-l_0)^2$$

式中k为摆绳的弹性刚度，l_0为无伸长时的摆长。于是，弹性球面摆的拉格朗日函数为

$$L=T-V=\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2\right)+mgr\cos\theta-\frac{1}{2}k(r-l_0)^2$$

由拉格朗日方程

$q_1=r$: $\quad \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right)-\dfrac{\partial L}{\partial r}=0$

得 $\quad m\ddot{r}-mr\dot{\theta}^2-mr\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2-mg\cos\theta+k(r-l_0)=0$

即 $\quad m(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2-r\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2)=mg\cos\theta-k(r-l_0) \qquad (1)$

同理，由拉格朗日方程

$q_2=\theta$: $\quad \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right)-\dfrac{\partial L}{\partial \theta}=0$

得 $\quad m(2r\dot{r}\dot{\theta}+r^2\ddot{\theta})-mr^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta+mgr\sin\theta=0$

即 $\quad m(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}-r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta)=-mg\sin\theta \qquad (2)$

同理，由拉格朗日方程

$q_3=\varphi$: $\quad \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right)-\dfrac{\partial L}{\partial \varphi}=0$

得 $\quad \dfrac{d}{dt}(mr^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi})=0$

即 $\quad mr^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}=$常数 $\qquad (3)$

因此，弹性球面摆的运动微分方程为如下方程组：

$$\begin{cases} m(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2-r\sin^2\theta\dot{\varphi}^2)=mg\cos\theta-k(r-l_0) \\ m(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}-r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta)=-mg\sin\theta \\ mr^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}=\text{常数} \end{cases}$$

例14. 半径为r的园柱沿一水平面无滑动而滚动。柱的重心位于C点而$OC=a$，柱对垂直于纸面并通过C点之轴的回转半径为K。求以角φ之函数表示的柱之角速度（角φ为OC线与铅垂线所成的角度）。在开始时园柱为静止，同时$\varphi=\varphi_0$。

解： 此园柱具有一个自由度，故选φ为相应的广义坐标。由题设条件得知园柱是作平面平行运动，接触点A为瞬心，故质心C的速度V_c为

$$V_c=\overline{AC}\cdot\dot{\varphi}$$

式中$\dot{\varphi}$为园柱转动的角速度。又由图2.13所示可得

$$AC=\sqrt{r^2+a^2-2ar\cos\varphi}$$

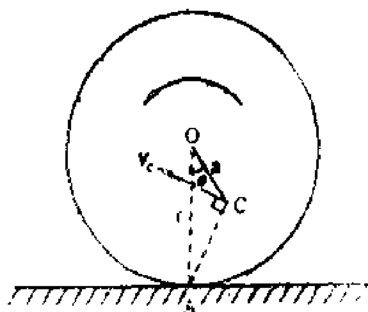


图2.13

所以， $\quad V_c=\sqrt{r^2+a^2-2ar\cos\varphi}\,\dot{\varphi}$

于是，园柱运动的动能为

$$T=\frac{1}{2}mV_c^2+\frac{1}{2}J_c\dot{\varphi}^2 \qquad (1)$$

式中m为园柱的质量，J_c为园柱对垂直纸面并通过质心C之轴的转动惯量。由题给条件

得$J_c=mK^2$。因此，（1）式可改写为

$$T=\frac{1}{2}m(r^2+a^2+K^2-2ar\cos\varphi)\dot{\varphi}^2 \tag{2}$$

若选水平面为势能的参考面时，那么园柱的势能为

$$V=mg(r-a\cos\varphi) \tag{3}$$

于是，园柱的拉格朗日函数为

$$L=T-V=\frac{1}{2}m(r^2+a^2+K^2-2ar\cos\varphi)\dot{\varphi}^2-mg(r-a\cos\varphi)$$

由拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial L}{\partial\varphi}=0$$

得 $$\frac{d}{dt}\left[m(r^2+a^2+K^2-2ar\cos\varphi)\dot{\varphi}\right]-mar\sin\varphi\dot{\varphi}^2+mga\sin\varphi=0$$

即 $$m(r^2+a^2+K^2-2ar\cos\varphi)\ddot{\varphi}+mar\sin\varphi\dot{\varphi}^2+mga\sin\varphi=0 \tag{4}$$

由于 $\ddot{\varphi}=\dot{\varphi}\frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi}$ 所以（4）式又可改写为

$$\frac{1}{2}\frac{d}{d\varphi}\left[(r^2+a^2+K^2-2ar\cos\varphi)\dot{\varphi}^2\right]=-ga\sin\varphi$$

因此 $$\int d[(r^2+a^2+K^2-2a\gamma\cos\varphi)\dot{\varphi}^2]=-\int 2ga\sin\varphi d\varphi$$

利用初始条件$\varphi=\varphi_0$时$\dot{\varphi}=0$

故得 $(r^2+a^2+K^2-2ar\cos\varphi)\dot{\varphi}^2=2ag(\cos\varphi-\cos\varphi_0)$

即 $$\dot{\varphi}^2=\frac{2ag(\cos\varphi-\cos\varphi_0)}{(r^2+a^2+K^2-2ar\cos\varphi)}$$

例15. 在半径r、重Q并能绕水平轴O转动的滑轮上绕一绳，绳之一端悬一重P的物体，起初此系统为静止。求当物体下落h距离时滑轮的角速度。

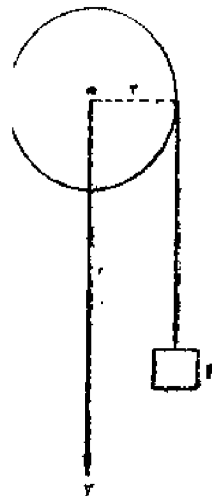


图2.14

解：若把滑轮与重物视为一个系统，那么显然此系统为具有一个自由度的保守系。故选y为广义坐标，如图2.14所示。于是，系统的动能为

$$T=\frac{1}{2}\frac{P}{g}\dot{y}^2+\frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2$$

式中J_0为滑轮对过O并垂直于滑轮面的水平轴的转动惯量，$\dot{\varphi}$为滑轮的转动角速度。

由于绳子不可伸长且与滑轮之间没相对滑动，所以 $\dot{y}=r\dot{\varphi}$，又$J_0=\frac{1}{2}\frac{Q}{g}\gamma$，于是

系统的动能表示式又可写为

$$T=\frac{1}{4}\left(\frac{2P}{g}+\frac{Q}{g}\right)\dot{y}=\frac{1}{4g}(2P+Q)\dot{y}^2$$

若选取水平轴O为系统势能的参考位置时，那么系统的势能为

$$V=-Py$$

故系统的拉格朗日函数为

$$L=T-V=\frac{1}{4g}(2P+Q)\dot{y}^2+Py$$

由拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right)-\frac{\partial L}{\partial y}=0$$

得 $$\frac{1}{2g}(2P+Q)\ddot{y}-P=0$$

即 $$\ddot{y}=\frac{2Pg}{2P+Q}$$

或 $$\dot{y}\frac{d\dot{y}}{dy}=\frac{2Pg}{2P+Q}$$

因此 $$\int_0^{\dot{y}}\dot{y}\,d\dot{y}=\int_0^h\frac{2Pg}{2P+Q}dy$$

故得 $$\dot{y}=2\sqrt{\frac{Pgh}{2P+Q}}$$

从而 $$\dot{\varphi}=\frac{\dot{y}}{r}=\frac{2}{r}\sqrt{\frac{Pgh}{2P+Q}}$$

例16. 一个均质的实心球在它的中心含有一个中空的球形洞穴，洞穴的半径是球的半径的$\frac{1}{2}$，试证球沿着粗糙的斜面向下滚动的加速度恰好是没有洞穴的一均质实心球的$\frac{98}{101}$。

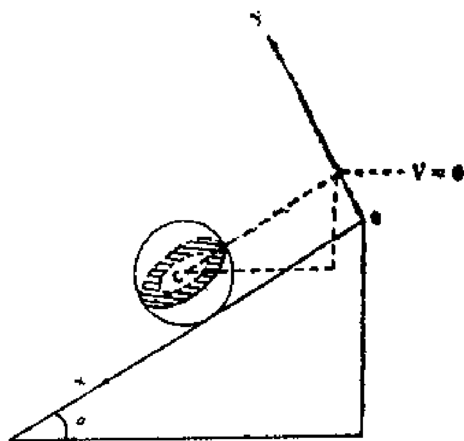


图2.15

解： 选如图 2.15 所示的坐标系，那么球的质心C的坐标为（x_c，r）。由题设得知球为具有一个自由度的保守系，故选x_c为相应的广义坐标。

（i）先研究实心球的情况：

实心球的动能为

$$T=\frac{1}{2}m\dot{x}_c^2+\frac{1}{2}J_c\dot{\varphi}^2$$

式中m为实心球的质量，J_c为实心球对过其质心C的转轴的转动惯量，$\dot{\varphi}$为其转动角速度。由题给条件得

$$J_c = \frac{2}{5} mr^2, \quad \dot{x}_c = r\dot{\varphi}$$

式中r为实心球的半径。故实心球的动能又可改写为

$$T = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{5} m\dot{x}_c^{\,2}$$

若选实心球的质心C的开始的位置为势能的参考点时，那么实心球的势能为

$$V = -mgx_c \sin\alpha$$

于是，实心球的拉格朗日函数为

$$L = T - V = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{5} m\dot{x}_c^{\,2} + mgx_c \sin\alpha$$

由拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_c}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_c} = 0$$

得 $$\frac{7}{5} m\ddot{x}_c - mg\sin\alpha = 0$$

故有 $$\ddot{x}_c = \frac{5}{7} g\sin\alpha$$

（ii）其次研究有空穴的中空球的情况：

空穴球的动能为

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_{c1}^{\,2} + \frac{1}{2} J_{c1} \dot{\varphi}^2 \qquad (1)$$

式中m_1为空穴球的质量，$\dot{x}_{c1}$为空穴球质心C_1的速度，J_{c1}为空穴球对过其质心C_1的转动轴的转动惯量，$\dot{\varphi}_1$为其转动角速度。

若设m'表示半径为$r' = \frac{1}{2} r$的球体的质量时，那么

$$J_{c1} = \frac{2}{5} mr^2 - \frac{2}{5} m' r'^2 \qquad (2)$$

由题设得知

$$\frac{m'}{m} = \frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi r'^3}{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3} = \left(\frac{r'}{r}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

式中ρ为球的密度。于是，（2）式可改写为

$$J_{c1} = \frac{2}{5}\left[1 - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4}\right] mr^2 = \frac{2}{5} \cdot \frac{31}{32} mr^2$$

又由于 $$m_1 = m - m' = \frac{7}{8} m, \quad \dot{x}_{c1} = r\dot{\varphi}_1$$

因此，（1）式又可写为

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{7}{8} + \frac{2}{5} \cdot \frac{31}{32}\right) m\dot{x}_{c1}^{\,2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{101}{80} m\dot{x}_{c1}^{\,2} \qquad (3)$$

若选空穴球的球心C_1开始位置为势能的参考位置时，那么其势能为

$$V=-m_1 g x_{c1}\sin\alpha=-\frac{7}{8}mg\,x_{c1}\sin\alpha \qquad (4)$$

于是，空穴球的拉格朗日函数为

$$L=T-V=\frac{1}{2}\cdot\frac{101}{80}m\dot{x}_{c1}^2+m\,g x_{c1}\cdot\sin\alpha=\frac{1}{2}\cdot\frac{101}{80}m\dot{x}_{c1}^2+\frac{7}{8}mgx_{c1}\sin\alpha$$

由拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}_{c1}}\right)-\frac{\partial L}{\partial x_{c1}}=0$$

得
$$\frac{101}{80}m\ddot{x}_{c1}-\frac{7}{8}mg\sin\alpha=0$$

即
$$\ddot{x}_{c1}=\frac{80\cdot7}{8\cdot101}g\sin\alpha=\frac{70}{101}g\sin\alpha$$

因此
$$\frac{\ddot{x}_{c1}}{\ddot{x}_c}=\frac{\frac{70}{101}g\sin\alpha}{\frac{5}{7}g\sin\alpha}=\frac{98}{101}$$

得证。

例17. 两个平行而非常靠近的光滑水平面间放一个质量为m_2的小球，小球系于一理想绳子的一端，绳子穿过上平面中的一个小孔，绳子的另一端系一质量为m_1的小球，此小球放于上平面上。在开始时，绳被拉紧，而小球m_1位于距小孔$r_0=a$处，并获得一垂直于绳子速度u。视两小球为质点，且略去任何阻力，试求（1）用极坐标表示的质点m_1的运动方程式；（2）在运动时间内绳中的张力。

解：把两个小球与绳子视为一个系统，显然此系统为具有二个自由度的保守系，故选r，θ为相应的广义坐标。由于绳子不可伸长，开始时又被拉紧，所以m_1小球的径向速度$\dot{r}$与m_2小球的速度的数值是相同的。于是，系统的动能可表示为

$$T=\frac{1}{2}m_1(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)+\frac{1}{2}m_2\dot{r}^2$$
$$=\frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{r}^2+\frac{1}{2}m_1r^2\dot{\theta}^2$$

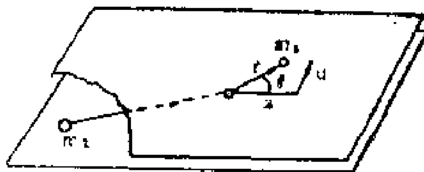


图2.16

若选下平面为势能参考点时，由于两平面靠得非常近，那么系统的势能为零。因此，系统的拉格朗日函数为

$$L=T-V=\frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{r}^2+\frac{1}{2}m_1r^2\dot{\theta}^2$$

由拉格朗日方程

$q_1=r$:
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{r}}\right)-\frac{\partial L}{\partial r}=0$$

得
$$(m_1+m_2)\ddot{r}-m_1r\dot{\theta}^2=0 \qquad (1)$$

由拉格朗日方程

$q_2=\theta$： $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right)-\frac{\partial L}{\partial\theta}=0$$

得 $$\frac{d}{dt}(m_1r^2\dot{\theta})=0$$

即 $$m_1r^2\dot{\theta}=c\text{（常数，即为角动量守恒）}$$

由初始条件得

$$c=a\cdot m_1u$$

故有 $$m_1r^2\dot{\theta}=m_1au$$

或者 $$r^2\dot{\theta}=au \tag{2}$$

把（2）式代入（1）式得

$$(m_1+m_2)\ddot{r}-m_1\cdot\frac{a^2u^2}{r^3}=0$$

即 $$\ddot{r}=\frac{m_1u^2}{(m_1+m_2)}\cdot\frac{a^2}{r^3} \tag{3}$$

若令 $n=u\sqrt{\frac{m_1}{m_1+m_2}}$ 且 $\ddot{r}=\dot{r}\frac{d\dot{r}}{dr}$ 那么（3）式又可表示为

$$\dot{r}\frac{d\dot{r}}{dr}=\frac{n^2a^2}{r^3}$$

于是 $$\int_0^{\dot{r}}\dot{r}d\dot{r}=\int_a^r\frac{n^2a^2}{r^3}dr$$

即得 $$\dot{r}^2=n^2\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)$$

或者 $$\dot{r}=n\sqrt{1-\frac{a^2}{r^2}}$$

所以 $$\int_a^r\frac{dr}{\sqrt{1-\frac{a^2}{r^2}}}=\int_0^t ndt$$

故有 $$\sqrt{r^2-a^2}=nt$$

或者 $$r=\sqrt{n^2t^2+a^2} \tag{4}$$

把（4）式代入（2）式得

$$\dot{\theta}=\frac{au}{n^2t^2+a^2}$$

即 $$\int_0^\theta d\theta=\int_0^t\frac{au}{n^2t^2+a^2}dt$$

故有 $$\theta=\frac{u}{n}\operatorname{arctg}\left(\frac{nt}{a}\right) \tag{5}$$

于是，m_1小球的运动方程式为

$$\begin{cases} r=\sqrt{n^2t^2+a^2} \\ \theta=\frac{u}{n}\operatorname{arctg}\left(\frac{nt}{a}\right) \end{cases}$$

为了求得在运动时间内绳子的张力 f，我们来研究m_2小球的运动。前面已经建立过

m_2小球的动能为 $\quad T_2=\frac{1}{2}m_2\dot{r}^2$

此时，对应于广义坐标 r 的广义力为 f，故由拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_2}{\partial \dot{r}}\right)-\frac{\partial T_2}{\partial r}=f$$

得 $\qquad m_2\ddot{r}=f \qquad\qquad (6)$

将（4）式对时间求导两次，面后代入（6）式便得

$$f=\frac{m_2n^2a^2}{r^3}$$

例18. 若单摆的悬挂点O以匀加速度 a 沿铅垂方向向上运动时，则其摆动周期为 $2\pi\sqrt{\frac{l}{g+a}}$ 试证明之。式中 l 为单摆的摆长。

解： 选如图 2.17 所示的坐标系，那么悬挂点 O 的坐标为（$0,y$）；摆的坐标为（x_1,y_1），即

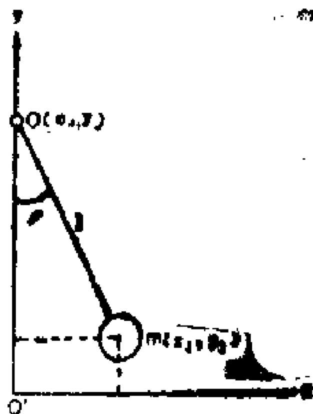


图 2.17

$$\begin{cases} x_1=l\sin\theta \\ y_1=y-l\cos\theta \end{cases}$$

故有 $\quad \begin{cases} \dot{x}_1=l\cos\theta\,\dot{\theta} \\ \dot{y}_1=\dot{y}+l\sin\theta\,\dot{\theta} \end{cases}$

由此可见，此系统具有二个自由度，故选 y，θ 为相应的广义坐标。于是，单摆的动能为

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2+\dot{y}_1^2)=\frac{1}{2}m(\dot{y}^2+2l\sin\theta\,\dot{y}\,\dot{\theta}+l^2\dot{\theta}^2)$$

若选O'点为势能的参考点时，那么单摆的势能为

$$V=mgy-mgl\cos\theta$$

因此单摆的拉格朗日函数为

$$L=T-V=\frac{1}{2}m(\dot{y}^2+2l\sin\theta\dot{y}\,\dot{\theta}+l^2\dot{\theta}^2)-mgy+mgl\cos\theta$$

由拉格朗日方程

$q_1=y$： $\qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right)-\frac{\partial L}{\partial y}=0$

得 $\qquad m\ddot{y}+ml\cos\theta\dot{\theta}^2+ml\sin\theta\ddot{\theta}+mg=0$

把 $\ddot{y}=a$ 代入上式即得

$$a+l\cos\theta\dot{\theta}^2+l\sin\theta\ddot{\theta}+g=0 \qquad (1)$$

由拉格朗日方程

$$q_2=\theta: \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right)-\frac{\partial L}{\partial\theta}=0$$

得 $$ml^2\ddot{\theta}+ml\cos\theta\dot{\theta}\dot{y}+ml\sin\theta\ddot{y}-ml\cos\theta\dot{y}\dot{\theta}+mgl\sin\theta=0$$

把 $\ddot{y}=a$ 代入上式便得

$$l\ddot{\theta}+(a+g)\sin\theta=0 \qquad (2)$$

当 θ 很小时，$\sin\theta=\theta$，故上述方程可改写为

$$\ddot{\theta}+\frac{a+g}{l}\theta=0$$

因此，单摆的摆动周期 $\tau=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{l}{a+g}}$ 得证。

例19. 如图2.18所示，x 和 z 是两根互相垂直的固连的刚性杆，它们以常角速度 ω 绕竖直轴 z 转动。小环 A 和 B 的质量均为 m，可以分别沿 x 和 z 轴滑动。AB 杆为轻刚性杆，长度为 $2a$，小珠子 C 的质量为 M，可沿 AB 杆滑动，不计摩擦。取广义坐标为 θ 和 ξ，求系统的动能。利用拉格朗日方程证明：仅当

$$a\omega^2=\frac{g\cos\alpha}{\sin^2\alpha}, \qquad (M+2m)\mathrm{tg}^2\alpha=M+4m$$

时，稳定的运动

$$\dot{\xi}=0, \qquad \theta=\alpha=\text{常数}$$

才是可能的。

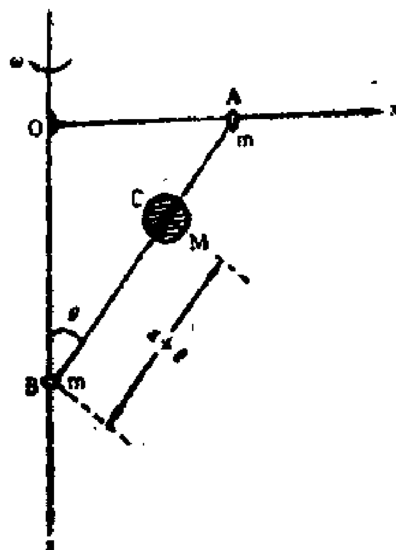


图 2.18

解： 由图2.18所示可得

$$x_A=2a\sin\theta$$
$$z_B=2a\cos\theta$$
$$x_C=(a+\xi)\sin\theta$$
$$z_C=(a-\xi)\cos\theta$$

故有

$$\dot{x}_A=2a\cos\theta\dot{\theta}$$
$$\dot{z}_B=-2a\sin\theta\dot{\theta}$$
$$\dot{x}_C=(a+\xi)\cos\theta\dot{\theta}+\dot{\xi}\sin\theta$$
$$\dot{z}_C=-(a-\xi)\sin\theta\dot{\theta}-\dot{\xi}\cos\theta$$

于是，系统的动能为

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{x}_A^2+\omega^2x_A^2)+\frac{1}{2}m\dot{z}_B^2+\frac{1}{2}M(\dot{x}_C^2+\dot{z}_C^2+\omega^2x_C^2)$$

$$=\frac{1}{2}m[4a^2\cos^2\theta\dot\theta^2+\omega^2\cdot4a^2\sin^2\theta+4a^2\sin^2\theta\dot\theta^2]+$$

$$+\frac{1}{2}M\{[(a+\xi)\cos\theta\dot\theta+\dot\xi\sin\theta]^2+[-(a-\xi)\sin\theta\dot\theta-\dot\xi\cos\theta]^2+$$

$$+\omega^2(a+\xi)^2\sin^2\theta\}$$

$$=\frac{1}{2}m(4a^2\dot\theta^2+4a^2\omega^2\sin^2\theta)+\frac{1}{2}M\{[a^2+\xi^2+2a\xi(\cos^2\theta-\sin^2\theta)]\dot\theta^2+$$

$$+\dot\xi^2+4a\sin\theta\cdot\cos\theta\dot\theta\dot\xi+\omega^2(a+\xi)^2\sin^2\theta\}$$

$$=\frac{1}{2}m(4a^2\dot\theta^2+4a^2\omega^2\sin^2\theta)+\frac{1}{2}M[(a^2+\xi^2+2a\xi\cos2\theta)\dot\theta^2+$$

$$+\dot\xi^2+2a\sin2\theta\dot\theta\dot\xi+\omega^2(a+\xi)^2\sin^2\theta] \qquad (1)$$

若选ox轴为势能的参考位置时，那么系统的势能为

$$V=-mgz_B-Mgz_C=-2mga\cos\theta-Mg(a-\xi)\cos\theta \qquad (2)$$

因此，系统的拉格朗日函数为

$$L=T-V=\frac{1}{2}m(4a^2\dot\theta^2+4a^2\omega^2\sin^2\theta)+\frac{1}{2}M[(a^2+\xi^2+2a\xi\cos2\theta)\dot\theta^2+$$

$$+\dot\xi^2+2a\sin2\theta\dot\theta\dot\xi+\omega^2(a+\xi)^2\sin^2\theta]+2mga\cos\theta+$$

$$+Mg(a-\xi)\cos\theta \qquad (3)$$

由拉格朗日方程

$$q_1=\theta \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot\theta}\right)-\frac{\partial L}{\partial\theta}=0$$

得

$$\frac{d}{dt}[4ma^2\dot\theta+M(a^2+\xi^2+2a\xi\cos2\theta)\dot\theta+Ma\sin2\theta\dot\xi]-$$

$$-[2ma^2\omega^2\cdot2\sin\theta\cos\theta+(-Ma\xi\dot\theta^2\cdot2\sin2\theta)+Ma\cos2\theta\cdot2\dot\theta\dot\xi+$$

$$+M\omega^2(a+\xi)^2\sin\theta\cos\theta-2mga\sin\theta-Mg(a-\xi)\sin\theta]=0$$

即

$$4ma^2\ddot\theta+M(a^2+\xi^2+2a\xi\cos2\theta)\ddot\theta+M[2\xi\dot\xi+2a\dot\xi\cos2\theta+2a\xi(-2\sin2\theta)\dot\theta]\dot\theta+$$

$$+Ma\sin2\theta\ddot\xi+2Ma\cos2\theta\dot\theta\dot\xi-2ma^2\omega^2\sin2\theta+2Ma\sin2\theta\xi\dot\theta^2-2Ma\cos2\theta\dot\theta\dot\xi-$$

$$-\frac{1}{2}M(a+\xi)^2\omega^2\sin2\theta+2mga\sin\theta+Mg(a-\xi)\sin\theta=0 \qquad (4)$$

若$\xi=0$，　$\theta=\alpha=$常数时，那么（4）式将变为

$$(4m+M)a^2\omega^2\sin2\alpha=(4m+2M)ga\sin\alpha$$

即　$$2(4m+M)a\omega^2\cos\alpha=(4m+2M)g$$

或者　$$(4m+M)a\omega^2\cos\alpha=(2m+M)g \qquad (5)$$

又由拉格朗日方程

$$q_2=\xi: \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot\xi}\right)-\frac{\partial L}{\partial\xi}=0$$

得 $$\frac{d}{dt}[M\dot{\xi}+Ma\sin 2\theta\dot{\theta}]-M(\xi+a\cos 2\theta)\dot{\theta}^2-M(a+\xi)\omega^2\sin^2\theta+Mg\cos\theta=0$$

即 $$M\ddot{\xi}+Ma\sin 2\theta\ddot{\theta}+2Ma\cos 2\theta\dot{\theta}^2-M(\xi+a\cos 2\theta)\dot{\theta}^2-M(a+\xi)\omega^2\sin^2\theta+$$
$$+Mg\cos\theta=0 \quad (6)$$

若$\xi=0$，　$\theta=\alpha=$常数时，那么（6）式又可表示为

$$a\omega^2=\frac{g\cos\alpha}{\sin^2\alpha} \quad (7)$$

把（7）式代入（5）式便得

$$(4m+M)\text{ctg}^2\alpha=2m+M$$

即 $$4m+M=(2m+M)\text{tg}^2\alpha \quad (8)$$

因此，只有当

$$a\omega^2=\frac{g\cos\alpha}{\sin^2\alpha}, \qquad (M+2m)\text{tg}^2\alpha=M+4m$$

时，稳定的运动

$$\xi=0, \qquad \theta=\alpha=常数$$

才是可能的，得证。

例20. 两均质园柱体的重量分别为P_1和P_2，底面半径分别为r_1和r_2。如图2.19所示，在它们的柱面中间用一根不可伸长的细绳缠联着，细绳AB段恰成竖直线。园柱A可绕固定轴O_1自由转动，园柱B在重力作用下由静止下落。经过时间t时（假设该瞬时两园柱上还有绳缠着），求：（1）两个园柱的角速度ω_1和ω_2；（2）园柱B的中心O_2下落的距离。

解： 此系统具有两个自由度，故选y_2，φ 为广义坐标。于是，系统的动能为

$$T=\frac{1}{2}J_1\dot{\varphi}_1^2+\frac{1}{2}m_2\dot{y}_2^2+\frac{1}{2}J_2\dot{\varphi}_2^2$$

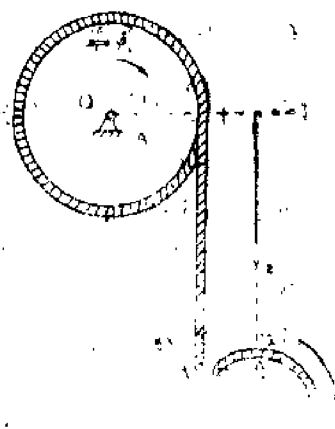


图 2.19

式中J_1为A园柱对O_1轴的转动惯量，$\dot{\varphi}_1$为其转动角速度；m_2为B园柱的质量，J_2为B园柱对O_2轴的转动惯量，$\dot{\varphi}_2$为其转动角速度，$\dot{y}_2$为O_2的速度，由题设得知：

$$\dot{y}_2=r_1\dot{\varphi}_1+r_2\dot{\varphi}_2$$

$$J_1=\frac{1}{2}m_1r_1^2$$

$$J_2=\frac{1}{2}m_2r_2^2$$

式中m_1为A园柱的质量。于是，系统的动能表达式又可改写为

$$T=\frac{1}{4}m_1r_1^2\dot{\varphi}_1^2+\frac{1}{2}m_2\dot{y}_2^2+\frac{1}{4}m_2(\dot{y}-r_1\dot{\varphi}_1)^2 \quad (1)$$

若选O_1水平轴为势能的参考点时，那么系统的势能为

$$V=-m_2 g y_2 \qquad (2)$$

因此，系统的拉格朗日函数为

$$L=T-V=\frac{1}{4}m_1 r_1^2\dot{\varphi}_1^2+\frac{1}{2}m_2\dot{y}_2^2+\frac{1}{4}m_2(\dot{y}_2-r_1\dot{\varphi}_1)^2+m_2 g y_2 \qquad (3)$$

由拉格朗日方程

$q_1=y_2$，$\quad \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{y}_2}\right)-\dfrac{\partial L}{\partial y_2}=0$

得 $\quad m_2\ddot{y}_2+\dfrac{1}{2}m_2(\ddot{y}_2-r_1\ddot{\varphi}_1)-m_2 g=0$

即 $\quad \dfrac{3}{2}m_2\ddot{y}_2-\dfrac{1}{2}m_2 r_1\ddot{\varphi}_1-m_2 g=0 \qquad (4)$

又由拉格朗日方程

$q_2=\varphi_1$，$\quad \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1}\right)-\dfrac{\partial L}{\partial \varphi_1}=0$

得 $\quad \dfrac{1}{2}m_1 r_1^2\ddot{\varphi}_1-\dfrac{1}{2}m_2(\ddot{y}_2-r_1\ddot{\varphi}_1)r_1=0$

即 $\quad (m_1+m_2)r_1\ddot{\varphi}_1-m_2\ddot{y}_2=0 \qquad (5)$

把（5）式代入（4）式得

$$(3m_1+2m_2)r_1\ddot{\varphi}_1=2m_2 g$$

故有 $\quad \ddot{\varphi}_1=\dfrac{2m_2 g}{(3m_1+2m_2)r_1} \qquad (6)$

把上式积分一次得

$$\dot{\varphi}_1=\frac{2m_2 g t}{(3m_1+2m_2)r_1}+C_1$$

由初始条件 $t=0$ 时 $\dot{\varphi}_1=0$ 得 $C_1=0$，于是

$$\dot{\varphi}_1=\frac{2m_2 g t}{(3m_1+2m_2)r_1}=\frac{2P_2 g t}{(3P_1+2P_2)r_1} \qquad (7)$$

把（6）式代入（5）式得

$$\ddot{y}_2=\frac{2m_2(m_1+m_2)g}{(3m_1+2m_2)m_2}=\frac{2(P_1+P_2)g}{3P_1+2P_2} \qquad (8)$$

将上式积分一次得

$$\dot{y}_2=\frac{2(P_1+P_2)gt}{3P_1+2P_2}+C_2$$

由于初始条件 $t=0$ 时，$\dot{y}_2=0$ 故得 $C_2=0$，于是

$$\dot{y}_2=\frac{2(P_1+P_2)gt}{3P_1+2P_2} \qquad (9)$$

考虑到

$$r_2\dot{\varphi}_2=\dot{y}_2-r_1\dot{\varphi}_1$$

所以 $\dot{\varphi}_2=\dfrac{2(P_1+P_2)gt}{(3P_1+2P_2)r_2}-\dfrac{2P_2gt}{(3P_1+2P_2)r_2}=\dfrac{2P_1gt}{(3P_1+2P_2)r_2}$ (10)

而O_2下落的距离为

$$S=\int_0^t \dot{y}_2dt=\int_0^t \frac{2(P_1+P_2)gt}{(3P_1+2P_2)}dt=\frac{(P_1+P_2)gt^2}{3P_1+2P_2}$$

例21. 两根各长 l、各具质量m的杆子AC与BC，可以其A端与B端沿一固定铅垂直线OZ不受摩擦而滑动，并可绕此直线而转动，二杆在C点以铰链相连。如以角$\varphi=\angle ACD$，系绕OZ轴的转角θ及距离$Z=OD$（D为AB线段的中点）为参变数，而在开始时，$\varphi=\varphi_0$，$\theta=0$，$Z=Z_0$，$\dot{\varphi}=0$，$\dot{\theta}=\dot{\theta}_0$，$\dot{Z}=0$，试求此系统的运动。

解： 若把杆AC与杆BC视为一系统，显然此系统具有三个自由度，故选φ，θ，Z为相应的广义坐标。那么系统的动能为

$$T=\frac{1}{2}m[(\dot{z}-\frac{l}{2}\cos\varphi\dot{\varphi})^2+(-\frac{l}{2}\sin\varphi\dot{\varphi})^2+(\frac{l}{2}\cos\varphi)^2\dot{\theta}^2]+$$

$$+\frac{1}{2}m[(\dot{z}+\frac{l}{2}\cos\varphi\dot{\varphi})^2+(-\frac{l}{2}\sin\varphi\dot{\varphi})^2+(\frac{l}{2}\cos\varphi)^2\dot{\theta}^2]$$

$$=\frac{1}{2}m[\dot{z}^2-l\cos\varphi\dot{\varphi}\dot{z}+\frac{l^2}{4}\cos^2\varphi\dot{\varphi}^2+\frac{l^2}{4}\sin^2\varphi\dot{\varphi}^2+\frac{l^2}{4}\cos^2\varphi\dot{\theta}^2]+$$

$$+\frac{1}{2}m[\dot{z}^2+l\cos\varphi\dot{\varphi}\dot{z}+\frac{l^2}{4}\cos^2\varphi\dot{\varphi}^2+\frac{l^2}{4}\sin^2\varphi\dot{\varphi}^2+\frac{l^2}{4}\cos^2\varphi\dot{\theta}^2]$$

$$=\frac{1}{2}m[2\dot{z}^2+\frac{l^2}{2}\dot{\varphi}^2+\frac{l^2}{2}\cos^2\varphi\dot{\theta}^2]$$

若选O点为势能的参考点时，那么系统的势能为

$$V=-mg(z-\frac{l}{2}\sin\varphi)-mg(z+\frac{l}{2}\sin\varphi)=-2mgz$$

于是，系统的拉格朗日函数为

$$L=T-V=\frac{1}{2}m(2\dot{z}^2+\frac{l^2}{2}\dot{\varphi}^2+\frac{l^2}{2}\cos^2\varphi\dot{\theta}^2)+2mgz$$

由拉格朗日方程

$q_1=z$： $\dfrac{d}{dt}(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{z}})-\dfrac{\partial L}{\partial z}=0$

得 $2m\ddot{z}-2mg=0$

即 $\ddot{z}=g$

积分上式便有

$$z=\frac{1}{2}gt^2+C_1t+C_2$$

由初始条件 $t=0$时，$z=z_0$，$\dot{z}=0$

得 $C_1=0$，$C_2=z_0$，于是

$$z=\frac{1}{2}gt^2+z_0 \qquad (1)$$

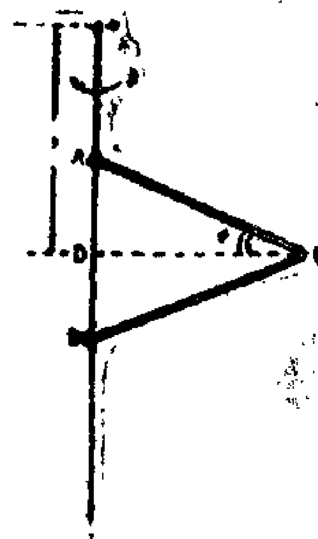


图 2.20

由拉格朗日方程

$q_2=\theta$： $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot\theta}\right)-\frac{\partial L}{\partial\theta}=0$

得 $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}ml^2\cos^2\varphi\,\dot\theta\right)=0$

故有 $\frac{1}{2}ml^2\cos^2\varphi\,\dot\theta=C_2$

由初始条件 $t=0$ 时，$\varphi=\varphi_0$，$\dot\theta=\dot\theta_0$ 故得

$$C_2=\frac{1}{2}ml^2\cos^2\varphi_0\dot\theta_0$$

于是 $\cos^2\varphi\,\dot\theta=\cos^2\varphi_0\dot\theta_0$ （2）

由拉格朗日方程

$q_3=\varphi$： $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot\varphi}\right)-\frac{\partial L}{\partial\varphi}=0$

得 $\frac{1}{2}ml^2\ddot\varphi+\frac{1}{2}ml^2\cos\varphi\sin\varphi\,\dot\theta^2=0$

将（2）式代入（3）式得

$$\ddot\varphi+\cos\varphi\cdot\sin\varphi\left(\frac{\cos^2\varphi_0\dot\theta_0}{\cos^2\varphi}\right)^2=0$$

即 $\ddot\varphi+\cos^4\varphi_0\dot\theta_0^2\cdot\frac{\sin\varphi}{\cos^3\varphi}=0$

或者 $\dot\varphi d\dot\varphi=-\cos^4\varphi_0\cdot\dot\theta_0^2\cdot\frac{\sin\varphi}{\cos^3\varphi}d\varphi$

积分上式： $\int_0^{\dot\varphi}\dot\varphi d\dot\varphi=-\cos^4\varphi_0\dot\theta_0^2\int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{\sin\varphi}{\cos^3\varphi}d\varphi$

得 $\frac{1}{2}\dot\varphi^2=\frac{1}{2}\cos^2\varphi_0\dot\theta_0^2-\frac{1}{2}\cdot\frac{\cos^4\varphi_0\dot\theta_0^2}{\cos^2\varphi}$

或者 $\dot\varphi=\frac{\cos\varphi_0\dot\theta_0}{\cos\varphi}\sqrt{\cos^2\varphi-\cos^2\varphi_0}$

于是 $\frac{\cos\varphi\,d\varphi}{\sqrt{\cos^2\varphi-\cos^2\varphi_0}}=\cos\varphi_0\dot\theta_0dt$

即 $\frac{d(\sin\varphi)}{\sqrt{1-\sin^2\varphi-1+\sin^2\varphi_0}}=\cos\varphi_0\dot\theta_0dt$

或者 $\frac{d(\sin\varphi)}{\sqrt{\sin^2\varphi_0-\sin^2\varphi}}=\cos\varphi_0\dot\theta_0dt$

积分上式： $\int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{d(\sin\varphi)}{\sqrt{\sin^2\varphi_0-\sin^2\varphi}}=\int_0^t\cos\varphi_0\dot\theta_0$

得 $-\arccos\left(\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi_0}\right)=\cos\varphi_0\dot\theta_0t$

即 $\cos(-\cos\varphi_0\dot{\theta}_0 t)=\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi_0}$

或者 $\sin\varphi=\sin\varphi_0\cdot\cos(\cos\varphi_0\dot{\theta}_0 t)$ （4）

由于 $\dot{\theta}=\frac{\cos^2\varphi_0\dot{\theta}_0}{\cos^2\varphi}$ 所以 $d\theta=\frac{\cos^2\varphi_0\dot{\theta}_0}{1-\sin^2\varphi}dt$

积分上式 $\int_0^\theta d\theta=\int_0^t\frac{\cos^2\varphi_0\dot{\theta}_0 dt}{1-\sin^2\varphi_0\cos^2(\cos\varphi_0\dot{\theta}_0 t)}$

$$=\int_0^t\frac{\cos\varphi_0 d(\cos\varphi_0\dot{\theta}_0 t)}{1-\sin^2\varphi_0\cos^2(\cos\varphi_0\dot{\theta}_0 t)} \quad (5)$$

由积分公式 $\int\frac{dx}{a+b\cos^2x}=\frac{1}{\sqrt{a^2+ab}}\text{arctg}(\frac{\sqrt{a^2+ab}}{a+b}\text{tg}x)$

故（5）式可写为

$$\theta=\frac{\cos\varphi_0}{\sqrt{1-\sin^2\varphi_0}}\text{arctg}[\frac{\sqrt{1-\sin^2\varphi_0}}{1-\sin^2\varphi_0}\text{tg}(\cos\varphi_0\dot{\theta}_0 t)]$$

$$=\text{arctg}[\frac{1}{\cos\varphi_0}\text{tg}(\cos\varphi_0\dot{\theta}_0 t)]$$

即 $\text{tg}\theta=\frac{1}{\cos\varphi_0}\text{tg}(\cos\varphi_0\dot{\theta}_0 t)$ （6）

例22. 略去质量的细长直杆可在水平面内绕其上固定点O旋转，O点距杆之A端的距离为a。杆之A端固结一质量为M的质点，杆之另一端套一质量为m的小环B，小环可沿杆无摩擦而滑动。开始运动时小环B为静止且距O点的距离为r_0，杆的角速度为ω，试求小环B相对于杆子的速度u，并导出小环轨迹在极坐标中的微分方程式。

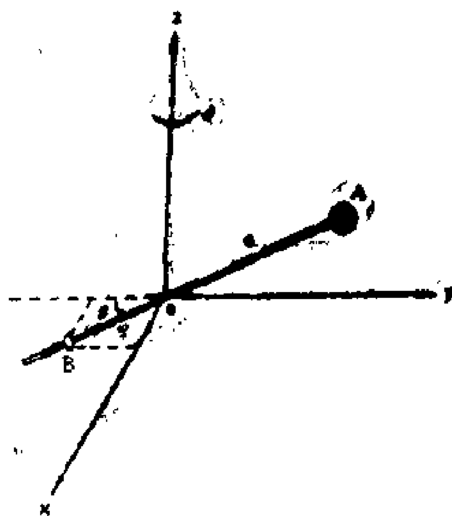


图2.21

解： 由于此系统具有二个自由度，故选r，θ为相应的广义坐标，如图2.21所示。于是系统的动能为

$$T=\frac{1}{2}Ma^2\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2) \quad (1)$$

若选xoy水平面为势能的参考面时，那么系统的势能为

$$V=0 \quad (2)$$

故系统的拉格朗日函数为

$$L=T-V=\frac{1}{2}Ma^2\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2) \quad (3)$$

由拉格朗日方程

$q_1=r$:　　　$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right)-\frac{\partial L}{\partial r}=0$

得　　$m(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)=0$

即　　$\ddot{r}-r\dot{\theta}^2=0$　　　　　　　　　　　　　　　　（4）

由拉格朗日方程

$q_2=\theta$:　　　$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \theta}=0$

得　　$\frac{d}{dt}[(Ma^2+mr^2)\dot{\theta}]=0$

即　　$(Ma^2+mr^2)\dot{\theta}=C$　（常数）

由初始条件　$t=0$ 时，$r=r_0$，$\dot{\theta}=\omega_0$　得　$C=(Ma^2+mr_0^2)\omega_0$

故有　　$(Ma^2+mr^2)\dot{\theta}=(Ma^2+mr_0^2)\omega_0$　　　　　　　　　　　（5）

把（5）式代入（4）式得

$$\ddot{r}=\frac{r(Ma^2+mr_0^2)^2\omega_0^2}{(Ma^2+mr^2)^2}$$

由于　　$\ddot{r}=\dot{r}\frac{d\dot{r}}{dr}$　所以上式又可改写为

$$\dot{r}d\dot{r}=(Ma^2+mr_0^2)^2\omega_0^2\cdot\frac{rdr}{(Ma^2+mr^2)^2}$$

于是　　$\int_0^u \dot{r}d\dot{r}=\int_{r_0}^{r}(Ma^2+mr_0^2)^2\omega_0^2\cdot\frac{rdr}{(ma^2+mr^2)^2}$

$$=\frac{(Ma^2+mr_0^2)^2\omega_0^2}{2m}\int_{r_0}^{r}\frac{d(Ma^2+mr^2)}{(Ma^2+mr^2)^2}$$

故得　　$\frac{1}{2}u^2=\frac{(Ma^2+mr_0^2)^2\omega_0^2}{2m}\cdot\left(-\frac{1}{Ma^2+mr^2}\right)\Big|_{r_0}^{r}$

即　　$u^2=\frac{(Ma^2+mr_0^2)^2\omega_0^2}{m}\left(\frac{1}{Ma^2+mr_0^2}-\frac{1}{Ma^2+mr^2}\right)$

$$=\omega_0^2\cdot\frac{(Ma^2+mr_0^2)}{(Ma^2+mr^2)}(r^2-r_0^2)$$

或者　　$u=\omega_0\sqrt{\frac{Ma^2+mr_0^2}{Ma^2+mr^2}(r^2-r_0^2)}$　　　　　　　　　　　（6）

由于　　$\frac{dr}{dt}=u=\omega_0\sqrt{\frac{Ma^2+mr_0^2}{Ma^2+mr^2}(r^2-r_0^2)}$　　所以

$$\frac{dr}{d\theta}\dot{\theta}=\omega_0\sqrt{\frac{Ma^2+mr_0^2}{Ma^2+mr^2}(r^2-r_0^2)}\qquad(7)$$

把（5）代入（6）式便得

$$\frac{dr}{d\theta}=\frac{\omega_0\sqrt{\frac{Ma^2+mr_0^2}{Ma^2+mr^2}(r^2-r_0^2)}\cdot(Ma^2+mr^2)}{(Ma^2+mr_0^2)\omega_0}$$

$$=\sqrt{\frac{Ma^2+mr^2}{Ma^2+mr_0^2}(r^2-r_0^2)}$$

上式便是小环轨迹在极坐标中的微分方程式。

例23. 一辆质量为M的铁路平车，在平直的铁轨上能无摩擦地向前滚动。开始时，平车上静止地站立着质量均为m的N个人。

（1）．N个人协调一致地跑向车的一端，他们恰好跑离开车的时候，相对于车的速度为v_r（所有的这些人均是同时离开车的）。计算当人跑离开车的时候，车的速度。

（2）．N个人是单独一个人跑离开车以后，接着另一个人跑离开车的。各自恰好跑离开车时，相对于车的速度为v_r。求车最后速度的表达式。

（3）．在（1）或（2）的情况下，那一种使车达到最大的速度。

解： 选过平车的质心C开始位置的竖直轴为y轴，交铁轨于O点为原点，而铁轨为x轴，方向如图2.22所示。

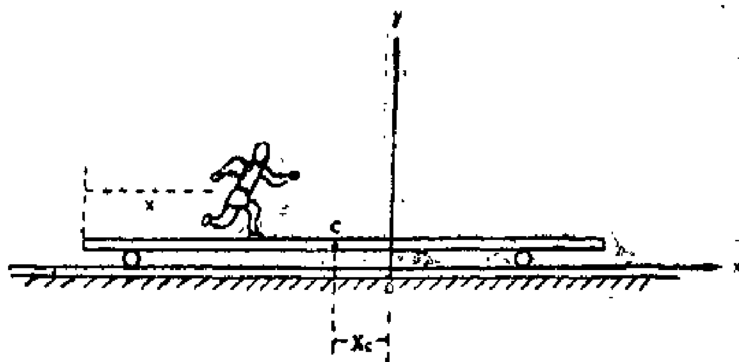


图 2.22

（1）N个人同时以相对速度v_r跑离开车的情况：若把N个人与平车视为一个系统，显然此系统具有二个自由度，故选人离平车的左端的距离x与平车质心C的坐标X_C为相应的广义坐标。于是，系统的动能为

$$T=\frac{1}{2}Nm(\dot{x}-\dot{X}_C)^2+\frac{1}{2}M\dot{X}_C^2$$

若选O点为势能的参考点时，那么系统的势能为

$$V=Nmgh+MgH=\text{常数}$$

式中h为人的质心的高度（此处假设各个人的质心高度一样），H为平车质心的高度。因此系统的拉格朗日函数可表为

$$L=T-V=\frac{1}{2}Nm(\dot{x}-\dot{X}_C)^2+\frac{1}{2}M\dot{X}_C^2-(Nmgh+MgH)$$

由拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{X}_C}\right)-\frac{\partial L}{\partial X_C}=0$$

得 $$\frac{d}{dt}[-Nm(\dot{x}-\dot{X}_C)+M\dot{X}_C]=0$$

即 $$-Nm\dot{x}+(M+Nm)\dot{X}_C=\text{常数}$$（意味着系统动量守恒）。

由于开始时系统处于静止状态，即 $t=0$ 时，$\dot{x}=0$，$\dot{X}_C=0$ 故有

$$-Nm\dot{x}+(M+Nm)\dot{X}_C=0$$

即 $$\dot{X}_C=\frac{Nm\dot{x}}{M+Nm}$$

于是，当N个人同时以相对速度$\dot{x}=v_r$跑离开车时，车所获得的速度为

$$\bar{V}=\frac{Nmv_r}{M+Nm}$$

（2）．N个人中是一个接着一个以相对速度v_r跑离开车的情况：

（i）第一个人以相对速度 v_r（其余人不动）跑离开车的情况：若把第一个人与（$N-1$）个人和平车视为一系统，显然，此系统具有二个自由度，故选第一个人离平车左端的距离x与（$N-1$）个人和平车所组成的质心坐标 X_{N-1} 为相应的广义坐标。于是，系统的动能为

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{x}-\dot{X}_{N-1})^2+\frac{1}{2}[M+(N-1)m]\dot{X}_{N-1}^2$$

若选O点为势能的参考点时，那么系统的势能为

$$V=mgh+(N-1)mgh+MgH=Nmgh+MgH=\text{常数}$$

因此，系统的拉格朗日函数为

$$L=T-V=\frac{1}{2}m(\dot{x}-\dot{X}_{N-1})^2+\frac{1}{2}[M+(N-1)m]\dot{X}_{N-1}^2-(Nmgh+MgH)$$

由拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{X}_{N-1}}\right)-\frac{\partial L}{\partial X_{N-1}}=0$$

得 $$\frac{d}{dt}\{-m(\dot{x}-\dot{X}_{N-1})+[M+(N-1)m]\dot{X}_{N-1}\}=0$$

或 $$\frac{d}{dt}\{-m\dot{x}+(M+Nm)\dot{X}_{N-1}\}=0$$

于是 $$-m\dot{x}+(M+Nm)\dot{X}_{N-1}=\text{常数}$$

由于开始时，系统为静止状态，即 $t=0$ 时，$\dot{x}=0$，$\dot{X}_{N-1}=0$ 故有

$$-m\dot{x}+(M+Nm)\dot{X}_{M-1}=0$$

即 $$\dot{X}_{N-1}=\frac{m\dot{x}}{M+Nm}$$

因此，当第一个人以相对速度$\dot{x}=v_r$跑离开车时，车所获得的速度为

$$\bar{V}_{N-1}=\frac{mv_r}{M+Nm} \qquad (1)$$

（ii）第二个人以相对速度 v_r（其余的人不动）跑离开时的情况。若把第二个人与（$N-2$）个人和平车视为一系统，显然此系统具有二个自由度，故选第二个人离平车的左端的距离x与（$N-2$）个人和平车所组成的质心坐标 X_{N-2} 为相应的广义坐标。于

是系统的动能为

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{x}-\dot{X}_{N-2})^2+\frac{1}{2}[M+(N-2)m]\dot{X}_{N-2}^2$$

若选O点为势能的参考位置时，那么系统的势能为

$$V=mgh+(N-2)mgh+MgH=\text{常数}$$

因此，系统的拉格朗日函数可表示为

$$L=T-V=\frac{1}{2}m(\dot{x}-\dot{X}_{N-2})^2+\frac{1}{2}[M+(N-2)m]\dot{X}_{N-2}^2-(N-1)mgh+MgH$$

由拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{X}_{N-2}}\right)-\frac{\partial L}{\partial X_{N-2}}=0$$

得 $$\frac{d}{dt}\{-m(\dot{x}-\dot{X}_{N-2})+[M+(N-2)m]\dot{X}_{N-2}\}=0$$

或 $$\frac{d}{dt}\{-m\dot{x}+[M+(N-1)m]\dot{X}_{N-2}\}=0$$

于是 $-m\dot{x}+[M+(N-1)m]\dot{X}_{N-2}=C$常数（意味着动量守恒）。

由题给条件得

$$C=[M+(N-1)m]\dot{X}_{N-1}$$

所以 $$\dot{X}_{N-2}=\dot{X}_{N-1}+\frac{m\dot{x}}{M+(N-1)m}$$

因此，当第二个人以相对速度$\dot{x}=v_r$跑离开车时，平车所获得的速度为

$$\bar{V}_{N-2}=\bar{V}_{N-1}+\frac{mv_r}{M+(N-1)m} \qquad (2)$$

…………………………………………………………………………

以此类推，当第N个人以相对速度$\dot{x}=v_r$跑离开车时，平车所获得的速度为

$$\bar{V}_{N-N}=\bar{V}_{N-(N-1)}+\frac{mv_r}{M+[N-(N-1)]m} \qquad (N)$$

把上述的（1）式、（2）式、…、（N）式相加便得

$$\bar{V}_{N-N}=\frac{mv_r}{M+Nm}+\frac{mv_r}{M+(N-1)m}+\frac{mv_r}{M+(N-2)m}+\cdots+\frac{mv_r}{M+[N-(N-1)]m}$$

$$=\sum_{n=1}^{N}\frac{mv_r}{M+nm}$$

（3）。比较（1）、（2）便有

$$\bar{V}_{N-N}=\sum_{n=1}^{N}\frac{mv_r}{M+nm}>\frac{Nmv_r}{M+Nm}=\bar{V}$$

因此，同样以相对速度v_r，一个人跑离开车后接着另一个人跑离开车，比N个人同时跑离开车，车所获得的速度大。且大小为

$$\bar{V}_{N-N}=\sum_{n=1}^{N}\frac{mv_r}{M+nm}$$

§2-3 能量积分

一、广义坐标中的动能表示式

假设我们所研究的质点组是由N个质点所组成，受m个完整约束，其约束方程为

$$f_s(\mathbf{r}_k, t) = 0 \qquad \begin{pmatrix} s=1, & 2, & \cdots, & m \\ k=1, & 2, & \cdots, & N \end{pmatrix}$$

那么质点组的自由度数为$3N-m=n$，因而我们选取q_1，q_2，…，q_n为相应的广义坐标。于是，质点组的第k个质点的位置矢径为

$$\mathbf{r}_k = \mathbf{r}_k(q_i, t) \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

而速度为

$$\mathbf{v}_k = \frac{d\mathbf{r}_k}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial t} \qquad (2.22)$$

所以质点组的动能为

$$T = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2} m_k \mathbf{v}_k^2 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} m_k(\mathbf{v}_k \cdot \mathbf{v}_k) \qquad (2.23)$$

把(2.22)式代入(2.23)式得

$$T = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} m_k\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial t}\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial t}\right)$$

将上式展开得

$$T = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} m_k \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j}\dot{q}_i\dot{q}_j + \sum_{k=1}^{N} m_k \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial t}\dot{q}_i +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} m_k \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial t}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial t}$$

交换求和的次序得

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{N} m_k \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j}\right)\dot{q}_i\dot{q}_j + \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{N} m_k\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial t}\right)\dot{q}_i +$$

$$+\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{N} m_k\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial t}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial t}\right) \qquad (2.24)$$

若令 $$a_{ij} = \sum_{k=1}^{N} m_k \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j}$$

$$b_i = \sum_{k=1}^{N} m_k \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial t}$$

$$c = \sum_{k=1}^{N} m_k \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial t}$$

那么，很显然a_{ij}，b_i，c 均为广义坐标q_1，q_2，…，q_n与时间t的函数。于是，(2.24)式可改写为

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j + \sum_{i=1}^{n} b_i\dot{q}_i + \frac{1}{2}c \tag{2.25}$$

因此，质点组的动能由三部份组成：第一部份是关于广义速度$\dot{q}_i$的齐二次函数，以T_2表示；第二部份是关于广义速度$\dot{q}_i$的齐一次函数，以T_1表示；第三部份是关于广义速度$\dot{q}_i$的齐零次函数，以T_0表示。所以，(2.25)式又可表示为

$$T = T_2 + T_1 + T_0 \tag{2.26}$$

由拉格朗日函数的定义

$$L = T - V$$

而且$V = V(q_i, t)$，故

$$L = L_2 + L_1 + L_0 \tag{2.27}$$

式中 $L_2 = T_2$，$L_1 = T_1$，$L_0 = T_0 - V$

若所研究的质点组所受的约束为稳定约束时，其约束方程为

$$f_s(\mathbf{r}_k) = 0 \qquad \begin{pmatrix} s = 1, 2, \cdots, m \\ k = 1, 2, \cdots, N \end{pmatrix}$$

那么 $\mathbf{r}_k = \mathbf{r}_k(q_i) \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$

因而 $\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial t} = 0$

故 $b_i = 0$，$c = 0$，于是，(2.25)式就变为

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j = T_2 \tag{2.28}$$

即稳定约束的质点组的动能是关于广义速度 $\dot{q}_i$ 的齐二次函数。

二、拉格朗日方程的能量积分

从前面所列举的例题中，我们可以清楚地看到由于拉格朗日方程本来就比较简单，所以求解拉格朗日方程也比较容易。然而，在一般的情况下，往往拉格朗日方程的结构是比较复杂的，因而给拉格朗日方程的求解带来很大的困难。为此，我们力图寻找在什么样的条件下可以得到拉格朗日方程的首次积分。于是，我们在下面就介绍拉格朗日方程的能量积分。

大家知道，牛顿第二定律

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v})=\mathbf{F}$$

的能量积分是机械能守恒定律。即只要把上述方程的两端同时点乘速度$\mathbf{v}$便得

$$\mathbf{v}\cdot\frac{d}{dt}(m\mathbf{v})=\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}$$

由于 $\mathbf{v}=\frac{d\mathbf{r}}{dt}$，故上述式子可改写为

$$\mathbf{v}\cdot\frac{d}{dt}(m\mathbf{v})=\mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

也即 $\mathbf{v}\cdot d(m\mathbf{v})=\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ （2.29）

如果$\mathbf{F}$具有势时，$\mathbf{F}=-\nabla V$，那么（2.29）式就可表示为

$$d(\frac{1}{2}m\mathbf{v}^2)=-dV$$

即 $$d(\frac{1}{2}m\mathbf{v}^2+V)=0$$

于是 $T+V=C$（常数） （2.30）

式中T为系统的动能。（2.30）式就是机械能守恒定律。

在§2—2里，我们曾经指出过，拉格朗日方程在分析力学中的地位与作用，相当于牛顿第二定律在牛顿力学中的地位与作用。因此，拉格朗日方程也应具有其相应的能量积分。

与上述的牛顿第二定律的能量积分求法相仿，我们将完整保守组的拉格朗日方程（2.21）式的两端同乘上广义速度$\dot{q}_i$，而后对i求和得

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i})\dot{q}_i-\frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i\right]=0$$

即 $$\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\dot{q}_i)-\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\ddot{q}_i-\frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i\right]=0$$

或 $$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\dot{q}_i\right)-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\ddot{q}_i\right)=0$$ （2.31）

如果拉格朗日函数L不显含时间t，即

$$L=L(q_i,\ \dot{q}_i)$$

那么 $$\frac{dL}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\ddot{q}_i\right)$$ （2.32）

把（2.32）式代入（2.31）式得

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\dot{q}_i-L\right]=0$$

积分上式得

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i-L=h \qquad (2.33)$$

式中h为积分常数。

为了进一步阐述（2.33）式的物理意义，我们先介绍下欧勒齐次函数定理：如果f是x_1，x_2…，x_r的齐n次函数，那么

$$\sum_{k=1}^{r}x_k\frac{\partial f}{\partial x_k}=nf$$

现在，由于$L=L_2+L_1+L_0$，所以

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L_2}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L_1}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L_0}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i \qquad (2.34)$$

根据上述的欧勒齐次函数定理得

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L_2}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i=2\cdot L_2$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L_1}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i=1\cdot L_1$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L_0}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i=0\cdot L_0$$

于是，（2.33）式可变为

$$2L_2+L_1-(L_2+L_1+L_0)=h \qquad (2.35)$$

由于　$L_2=T_2$，$L_0=T_0-V$，所以（2.35）式又可表示为

$$T_2-T_0+V=h \qquad (2.36)$$

上式便称为**广义能量积分**或**雅可俾积分**。当质点组所受的约束为稳定约束时（即$T_0=0$，$T_1=0$），那么（2.36）式就变为

$$T_2+V=h \qquad (2.37)$$

这就是前面所说的普通的能量积分即机械能守恒定律。

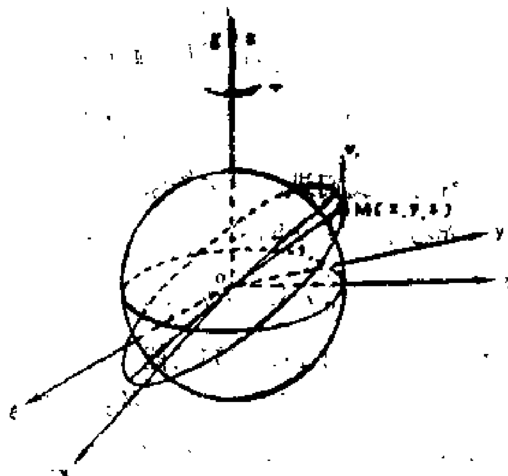


图2.23

例1　求人造地球卫星的广义能量积分。

解：选如图2.23所示的坐标系：$Oxyz$固联在地球上为运动坐标系；$O\xi\eta\zeta$为坐标轴指向某一恒星的固定坐标系。此两坐标系的原点均在地心上，且Oz轴与$O\zeta$轴重合。

由相对运动的速度公式

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \omega \times \mathbf{r} + \mathbf{v}_r \tag{1}$$

得人造卫星的速度为

$$\mathbf{v} = \omega\mathbf{k} \times (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) + (\dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k})$$

或 $$\mathbf{v} = (\dot{x} - \omega y)\mathbf{i} + (\dot{y} + \omega x)\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k}$$

因而人造地球卫星的动能为

$$T = \frac{1}{2}m\left[(\dot{x} - \omega y)^2 + (\dot{y} + \omega x)^2 + \dot{z}^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + m\omega(x\dot{y} - y\dot{x}) + \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2) \tag{2}$$

于是

$$T_2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

$$T_1 = m\omega(x\dot{y} - y\dot{x})$$

$$T_0 = \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2)$$

而人造地球卫星的势能为

$$V = -\frac{mk}{r} = -\frac{mk}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \tag{3}$$

因此，人造地球卫星的拉格朗日函数为

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + m\omega(x\dot{y} - y\dot{x}) + \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2)$$

$$+ \frac{mk}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

从上式中可以明显地看出L不显含时间t，所以人造地球卫星的广义能量积分存在且为

$$\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2) - \frac{mk}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = h \tag{4}$$

现在，我们进一步来探索上述人造地球卫星的广义能量积分的物理意义。

先考察（4）的第一项：

$$T_2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

显然是卫星相对于地球的动能。

其次，为了考察（4）式的第二项，我们先看看如下的事实：由于地球的自转所产生的人造卫星的离心力的势能为

$$V_{离心} = -\int_0^r \mathbf{F}_{离心} \cdot d\mathbf{r}$$

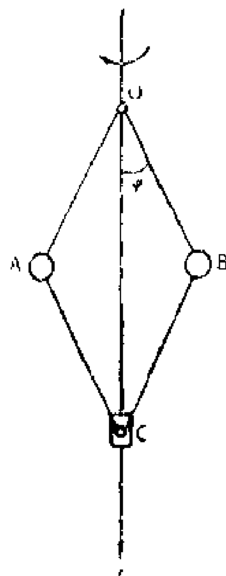
$$= -\int_0^r -[m\,\omega \times (\omega \times \mathbf{r})] \cdot d\mathbf{r}$$

$$= -m\omega^2 \int_0^{(x,y)} x\,dx + y\,dy$$

$$=-\frac{1}{2}m\omega^2(x^2+y^2)$$

因此，（4）式的第二项是由于地球的自转所引起的人造卫星的离心力的势能。至于（4）式的第三项为地球卫星的引力势能。

综上所述，我们可以清楚地看到，在旋转坐标系里，机械能不守恒，只有把惯性离心力造成的势能计算在内，能量方能守恒。



2.24

例 2 瓦特调速器由四根各长 l 的相同的杆 OA、OB、AC、BC，两个各具质量 m 的球A、B，及可沿铅垂直线 OZ 而滑动的、质量为M的套管C所组成。杆的联结点 O、A、B 与C均为铰链。O点是固定的。全系可绕定轴 OZ轴无摩擦而转动。假定杆的质量均可忽略，试以角 $\varphi=\angle BOC$与系绕OZ轴的转角 θ 为参变数，写出拉格朗日方程式。又由此式求出面积积分与能量积分。

解：由图2.24，所示可得

$$z_c=2l\cos\varphi$$

故有 $$\dot z_c=-2l\sin\varphi\,\dot\varphi$$

显然此系统具有二个自由度，故选φ,θ为广义坐标。于是，系统的动能为

$$T=2\cdot\frac{1}{2}m(l^2\dot\varphi^2+l^2\sin^2\varphi\,\dot\theta^2)+\frac{1}{2}M(2l\sin\varphi\,\dot\varphi)^2$$

$$=\frac{1}{2}\cdot2(m+2M\sin^2\varphi)l^2\dot\varphi^2+\frac{1}{2}\cdot2ml^2\sin^2\varphi\,\dot\theta^2 \qquad (1)$$

若选 O点为势能的参考点时，那么系统的势能为

$$V=-2mgl\cos\varphi-Mg\cdot2l\cos\varphi=-2(m+M)gl\cos\varphi \qquad (2)$$

因此，系统的拉格朗日函数为

$$L=T-V=\frac{1}{2}\cdot2(m+2M\sin^2\varphi)l^2\dot\varphi^2+\frac{1}{2}\cdot2ml^2\sin^2\varphi\,\dot\theta^2+$$

$$+2(m+M)g\cdot l\cos\varphi \qquad (3)$$

故有

$$\frac{\partial L}{\partial\dot\varphi}=2(m+2M\sin^2\varphi)l^2\dot\varphi$$

$$\frac{\partial L}{\partial\varphi}=4M\sin\varphi\cos\varphi\,l^2\dot\varphi^2+2ml^2\sin\varphi\cos\varphi\,\dot\theta^2-2(m+M)gl\sin\varphi$$

由拉格朗日方程

$$q_1=\varphi: \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot\varphi}\right)-\frac{\partial L}{\partial\varphi}=0$$

得$2(m+2M\sin^2\varphi)l^2\ddot\varphi+4M\sin\varphi\cos\varphi\,l^2\dot\varphi^2-2m\sin\varphi\cos\varphi\,l^2\dot\theta^2+2(m+M)gl\sin\varphi=0$ 或$(m+2M\sin^2\varphi)l\ddot\varphi+2M\sin\varphi\cos\varphi\,l\dot\varphi^2-m\sin\varphi\cos\varphi\,l\dot\theta^2+(m+M)g\sin\varphi=0$ (4)

又由于 $\dfrac{\partial L}{\partial \dot\theta}=2ml^2\sin^2\varphi\dot\theta$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta}=0$$

故由拉格朗日方程

$q_2=\theta$； $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot\theta}\right)-\dfrac{\partial L}{\partial \theta}=0$

得 $2ml^2\sin^2\varphi\dot\theta=C$（常数） （5）

或 $4ml^2\sin\varphi\cos\varphi\dot\varphi\dot\theta+2ml^2\sin^2\varphi\ddot\theta=0$ （6）

于是，系统的运动微分方程为

$$\begin{cases}(m+2M\sin^2\varphi)l\ddot\varphi+2M\sin\varphi\cos\varphi l\dot\varphi^2-m\sin\varphi\cos\varphi l\dot\theta^2+(m+M)g\sin\varphi=0\\ 2ml^2\sin^2\varphi\dot\theta=C\end{cases}$$

为了求能量积分，可有两种方法：

i、直接利用已经建立的拉格朗日方程

把（1）式与（2）式相加，然后对时间t求导得

$$\begin{aligned}\frac{d(T+V)}{dt}&=2(m+2M\sin^2\varphi)l^2\dot\varphi\ddot\varphi+4M\sin\varphi\cos\varphi\dot\varphi l^2\dot\varphi^2+\\&+2ml^2\sin\varphi\cos\varphi\dot\varphi\dot\theta^2+2ml^2\sin^2\varphi\dot\theta\ddot\theta+2(m+M)gl\sin\varphi\dot\varphi\\&=2[(m+2M\sin^2\varphi)l\ddot\varphi+2M\sin\varphi\cos\varphi l\dot\varphi^2-m\sin\varphi\cos\varphi l\dot\theta^2+\\&+(m+M)g\sin\varphi]l\dot\varphi+(4ml^2\sin\varphi\cos\varphi\dot\varphi\dot\theta+2ml^2\sin^2\varphi\ddot\theta)\dot\theta\end{aligned}$$

把（4）式与（6）式同时代入上式得

即 $T+V=h$（常数） （7）

或 $(m+2M\sin^2\varphi)l^2\dot\varphi^2+ml^2\sin^2\varphi\dot\theta^2-2(m+M)gl\cos\varphi=h$

这就是普通的能量积分，也即是机械能守恒定律。

ii、直接利用广义能量积分的定义

由（3）式可以清楚的知道，系统的拉格朗日函数不显含时间t，因此系统的广义能量存在且为

$T_2-T_0+V=h$ （8）

由（1）式得知：

$$T_2=T=(m+2M\sin^2\varphi)l^2\dot\varphi^2+ml^2\sin^2\varphi\dot\theta^2$$

$$T_0=0$$

于是（8）式又可表示为

$$T+V=h$$

或 $(m+2M\sin^2\varphi)l^2\dot\varphi^2+ml^2\sin^2\varphi\dot\theta^2-2(m+M)gl\cos\varphi=h$

由于面积常数的定义为

$$|\mathbf{h}_1|=|\mathbf{r}\times\mathbf{v}|$$

故在本题的情况下得

$$h_1=2l^2\sin^2\varphi\ \dot{\theta} \tag{9}$$

将（9）式代入（5）式便得

$$mh_1=C$$

此式便是面积分。

例3 求对称陀螺的能量积分。此陀螺支在一个固定支坐上并且仅受有重力的作用。参变数取为：陀螺自转角φ（绕对称轴的转动），章动角θ（陀螺对称轴与铅垂线间的夹角）及进动角ψ。（陀螺与支坐接触的点O位于对称轴上，并保持不动）。

解：此陀螺是绕定点运动，具有三个自由度，故选取上述的φ、θ、ψ 为相应的广义坐标，由题给条件得陀螺的动能为

$$T=\frac{1}{2}J(\omega_x^2+\omega_y^2)+\frac{1}{2}J_z\omega_z^2 \tag{1}$$

式中J为陀螺对通过定点O并垂直于对称轴之轴的转动惯量；J_z为陀螺对于对称轴的转动惯量。将欧勒运动学方程

$$\omega_x=\dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi+\dot{\theta}\cos\varphi$$

$$\omega_y=\dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi-\dot{\theta}\sin\varphi$$

$$\omega_z=\dot{\psi}\cos\theta+\dot{\varphi}$$

代入（1）式得

$$T=\frac{1}{2}[J(\dot{\psi}^2\sin^2\theta+\dot{\theta}^2)+J_z(\dot{\psi}\cos\theta+\dot{\varphi})^2]=T \tag{2}$$

若选支坐为势能的参考点时，那么陀螺的势能为

$$V=mga\cos\theta \tag{3}$$

式中m为陀螺的质量，a为陀螺的重心到O点的距离。于是，陀螺的拉格朗日函数为

$$L=T-V=\frac{1}{2}[J(\dot{\psi}^2\sin^2\theta+\dot{\theta}^2)+J_z(\dot{\psi}\cos\theta+\dot{\varphi})^2]-mga\cos\theta \tag{4}$$

由于L不显含时间t，所以广义能量积分存在且为

$$T_2-T_0+V=h$$

从（2）式知道：$T_0=0$，$T=T_2$，于是

$$T+V=h$$

即
$$\frac{1}{2}[J(\dot{\psi}^2\sin^2\theta+\dot{\theta}^2)+J_z(\dot{\psi}\cos\theta+\dot{\varphi})^2]+mga\cos\theta=h$$

此处的广义能量积分就是普通的能量积分，也就是机械能守恒定律。

§2-4 质点组(即系统)在其稳定平衡位置附近的小振动

当质点组处于稳定平衡位置时，如果给它一个微小的扰动，那么它将在其平衡位置附近作微幅的振动，通常我们就称此种振动为小振动。下面我们将应用拉格朗日

方程分别讨论单自由度、双自由度以及多自由度的质点组的小振动问题。

一、单自由度的质点组

设 q 为单自由度稳定保守组的广义坐标，那么质点组的动能可表示为

$$T=\frac{1}{2}a(q)\dot{q}^2$$

根据（2.28）式可知，上式中 a 表示一个与广义坐标 q 有关的系数。而质点组的势能仅为广义坐标 q 的函数，也即$V=V(q)$。由于在平衡位置势能取极小值，故从

$$\frac{\partial V}{\partial q}=0$$

（即平衡条件）可解得平衡位置$q=q_0$

将$a(q)$在$q=q_0$附近展开为泰勒级数：

$$a(q)=a(q_0)+\left(\frac{\partial a}{\partial q}\right)_{q_0}(q-q_0)+\cdots$$

故动能又可表示为

$$T=\frac{1}{2}\left[a(q_0)+\left(\frac{\partial a}{\partial q}\right)_{q_0}(q-q_0)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 a}{\partial q^2}\right)_{q_0}(q-q_0)^2+\cdots\right]\dot{q}^2 \qquad (2.38)$$

式中$a(q_0)$，$\left(\frac{\partial a}{\partial q}\right)_{q_0}$，$\left(\frac{\partial^2 a}{\partial q^2}\right)_{q_0}$，…，分别表示 a 及其导数在平衡位置 $q=q_0$处的数值。称$a(q_0)$为广义的惯量（常数）。

同样，$V(q)$也在$q=q_0$处展开为泰勒级数：

$$V(q)=V(q_0)+\left(\frac{\partial V}{\partial q}\right)_{q_0}(q-q_0)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q^2}\right)_{q_0}(q-q_0)^2+\cdots \qquad (2.39)$$

因为我们所研究的是在稳定平衡位置附近的小振动，所以$(q-q_0)$与$\dot{q}$均为一阶微量。若只保留到二阶微量并把平衡条件$\left(\frac{\partial V}{\partial q}\right)_{q_0}=0$代入时，那么（2.28）式与（2.39）式分别可以改写为

$$T=\frac{1}{2}a(q_0)\dot{q}^2 \qquad (2.40)$$

$$V=V(q_0)+\frac{C}{2}(q-q_0)^2 \qquad (2.41)$$

式中 $C=\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q^2}\right)_{q_0}$ 称为广义的刚度系数（常数）。

于是，系统的拉格朗日函数为

$$L=T-V=\frac{1}{2}a(q_0)\dot{q}^2-V(q_0)-\frac{C}{2}(q-q_0)^2 \qquad (2.42)$$

将（2.42）式代入拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial L}{\partial q}=0$$

得 $$a(q_0)\ddot{q}+C(q-q_0)=0 \qquad (2.43)$$

由于质点组是处于稳定的平衡位置，故$C=\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q^2}\right)_{q_0}>0$，所以（2.43）式是线性振动方程。由此可见，前面之所以要把动能T和势能V在平衡位置展开并保留到二阶微量就是为了使振动方程线性化。于是，由（2.43）式立即可求得质点组在$q=q_0$附近微振动的圆频率

$$\omega=\sqrt{\frac{C}{a(q_0)}}$$

二、两个自由度的质点组

设q_1，q_2为两个自由度稳定保守组的广义坐标，那么质点组的动能就表示为

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j=\frac{1}{2}(a_{11}\dot{q}_1^2+2a_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2+a_{22}\dot{q}_2^2) \qquad (2.44)$$

由（2.28）式可知，上式中的系数a_{11}，a_{12}，a_{21}，a_{22}是广义坐标q_1，q_2的函数，而且$a_{12}=a_{21}$。

质点组的势能为$V=V(q_1,q_2)$，由于在平衡位置势能取极小值，故从

$$\begin{cases}\dfrac{\partial V}{\partial q_1}=0\\[2ex]\dfrac{\partial V}{\partial q_2}=0\end{cases}\qquad\text{（平衡条件）}$$

可解出质点组的平衡位置(q_{10},q_{20})。为了简单起见，我们适当选取广义坐标的原点使得平衡位置刚好对应于

$$(q_{10},q_{20})=(0,0)$$

将$a_{11}(q_1,q_2)$，$a_{12}(q_1,q_2)$以及$a_{22}(q_1,q_2)$在平衡位置（0，0）附近展开为泰勒级数：

$$a_{11}(q_1,q_2)=(a_{11})_0+\left[\left(\frac{\partial a_{11}}{\partial q_1}\right)_0 q_1+\left(\frac{\partial a_{11}}{\partial q_2}\right)_0 q_2\right]+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial^2 a_{11}}{\partial q_1^2}\right)_0 q_1^2+\right.$$
$$\left.+2\left(\frac{\partial^2 a_{11}}{\partial q_1\partial q_2}\right)_0 q_1q_2+\left(\frac{\partial^2 a_{11}}{\partial q_2^2}\right)_0 q_2^2\right]+\cdots$$

$$a_{12}(q_1,q_2)=(a_{12})_0+\left[\left(\frac{\partial a_{12}}{\partial q_1}\right)_0 q_1+\left(\frac{\partial a_{12}}{\partial q_2}\right)_0 q_2\right]+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial^2 a_{12}}{\partial q_1^2}\right)_0 q_1^2+\right.$$
$$\left.+2\left(\frac{\partial^2 a_{12}}{\partial q_1\partial q_2}\right)_0 q_1q_2+\left(\frac{\partial^2 a_{12}}{\partial q_2^2}\right)_0 q_2^2\right]+\cdots$$

$$a_{22}(q_1,q_2)=(a_{22})_0+\left[\left(\frac{\partial a_{22}}{\partial q_1}\right)_0 q_1+\left(\frac{\partial a_{22}}{\partial q_2}\right)_0 q_2\right]+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial^2 a_{22}}{\partial q_1^2}\right)_0 q_1^2+\right.$$
$$\left.+2\left(\frac{\partial^2 a_{22}}{\partial q_1\partial q_2}\right)_0 q_1q_2+\left(\frac{\partial^2 a_{22}}{\partial q_2^2}\right)_0 q_2^2\right]+\cdots$$

式中$(a_{11})_0$、$\left(\frac{\partial a_{11}}{\partial q_1}\right)_0$、$\left(\frac{\partial a_{11}}{\partial q_2}\right)_0$、$\left(\frac{\partial^2 a_{11}}{\partial q_1^2}\right)_0$、$\left(\frac{\partial^2 a_{11}}{\partial q_1\partial q_2}\right)_0$、$\left(\frac{\partial^2 a_{11}}{\partial q_2^2}\right)_0$，…，分别表示$a_{11}$及其导数在平衡位置(0,0)的数值。同样，$(a_{12})_0$，$\left(\frac{\partial a_{12}}{\partial q_1}\right)_0$，$\left(\frac{\partial a_{12}}{\partial q_2}\right)_0$，$\left(\frac{\partial^2 a_{12}}{\partial q_1^2}\right)_0$，$\left(\frac{\partial^2 a_{12}}{\partial q_1\partial q_2}\right)_0$，$\left(\frac{\partial^2 a_{12}}{\partial q_2^2}\right)_0$，…分别表示$a_{12}$及其导数在平衡位置（0,0）的数

值。同样$(a_{22})_0$，$\left(\frac{\partial a_{22}}{\partial q_1}\right)_0$，$\left(\frac{\partial a_{22}}{\partial q_2}\right)_0$，$\left(\frac{\partial^2 a_{22}}{\partial q_1^2}\right)_0$，$\left(\frac{\partial^2 a_{22}}{\partial q_1 \partial q_2}\right)_0$，$\left(\frac{\partial^2 a_{22}}{\partial q_2^2}\right)_0$，…，分别表示$a_{22}$及其导数在平衡位置(0,0)的数值。

把$V(q_1, q_2)$也在平衡位置(0,0)附近展为泰勒级数：

$$V(q_1, q_2)=V(0,0)+\left[\left(\frac{\partial V}{\partial q_1}\right)_0 q_1+\left(\frac{\partial V}{\partial q_2}\right)_0 q_2\right]+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2}\right)_0 q_1^2+\right.$$

$$\left.+2\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_2}\right)_0 q_1 q_2+\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_2^2}\right)_0 q_2^2\right]+\cdots \qquad (2.45)$$

式中$V(0,0)$、$\left(\frac{\partial V}{\partial q_1}\right)_0$、$\left(\frac{\partial V}{\partial q_2}\right)_0$、$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2}\right)_0$、$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_2}\right)_0$、$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_2^2}\right)_0$，…，分别表示势能$V$及其导数在平衡位置(0,0)的数值。

由于我们所研究的是在稳定的平衡位置附近的小振动，所以q_1, q_2与$\dot{q}_1, \dot{q}_2$均为一阶微量。若只保留到二阶微量，并把平衡条件代入，那了（2.44）式与（2.45）式分别可表示为

$$T=\frac{1}{2}\left[(a_{11})_0 \dot{q}_1^2+2(a_{12})_0 \dot{q}_1 \dot{q}_2+(a_{22})_0 \dot{q}_2^2\right] \qquad (2.46)$$

$$V=V(0,0)+\frac{1}{2}\left[(C_{11})_0 q_1^2+2(C_{12})_0 q_1 q_2+(C_{22})_0 q_2^2\right] \qquad (2.47)$$

式中$(a_{11})_0$、$(a_{12})_0$、$(a_{22})_0$称之为广义的惯量(常数)，而$(c_{11})_0=\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2}\right)_0$、$(c_{12})_0=\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_2}\right)_0$，$(c_{22})_0=\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_2^2}\right)_0$称之为广义的刚度系数（常数）。于是，质点组的拉格朗日函数为

$$L=T-V=\frac{1}{2}\left[(a_{11})_0 \dot{q}_1^2+2(a_{12})_0 \dot{q}_1 \dot{q}_2+(a_{22})_0 \dot{q}_2^2\right]-V(0,0)-\frac{1}{2}\left[(c_{11})_0 q_1^2+\right.$$

$$\left.+2(c_{12})_0 q_1 q_2+(c_{22})_0 q_2^2\right] \qquad (2.48)$$

将（2.48）式代入拉格朗日方程

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_1}=0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_2}=0 \end{cases}$$

得

$$\begin{cases} (a_{11})_0 \ddot{q}_1+(a_{12})_0 \ddot{q}_2+(c_{11})_0 q_1+(c_{12})_0 q_2=0 \\ (a_{12})_0 \ddot{q}_1+(a_{22})_0 \ddot{q}_2+(c_{12})_0 q_1+(c_{22})_0 q_2=0 \end{cases} \qquad (2.49)$$

这就是稳定保守组在平衡位置（0,0）附近小振动的运动微分方程。

由于上述微分方程组是二阶线性齐次常系数微分方程，其解要求具有振动的形式，所以它的特解形式可设为

$$q_1=A_1 e^{ipt}, \quad q_2=A_2 e^{ipt} \qquad (2.50)$$

将（2.50）式代入（2.49）式，并消去e^{ipt}即得

$$\begin{cases}A_1[-(a_{11})_0P^2+(c_{11})_0]+A_2[-(a_{12})_0P^2+(c_{12})_0]=0\\A_1[-(a_{12})_0P^2+(c_{12})_0]+A_2[-(a_{22})_0P^2+(c_{22})_0]=0\end{cases}\tag{2.51}$$

大家知道，要使这个关于未知量 A_1和A_2 的线性齐次代数方程组有非零解必须满足其系数组成的行列式为零。亦即

$$\begin{vmatrix}-(a_{11})_0P^2+(c_{11})_0, & -(a_{12})_0P^2+(c_{12})_0\\-(a_{12})_0P^2+(c_{12})_0, & -(a_{22})_0P^2+(c_{22})_0\end{vmatrix}=0$$

展开得 $[(a_{11})_0(a_{22})_0-(a_{12})_0^2]P^4-[(a_{11})_0(c_{22})_0+(a_{22})_0(c_{11})_0-$

$$-2(a_{12})_0(c_{12})_0]P^2+[(c_{11})_0(c_{22})_0-(c_{12})_0^2]=0\tag{2.52}$$

称（2.52）方程式为特征方程或频率方程。有时也称之为久期方程。此方程是关于P^2的二次方程，由此可以解得P^2的两个正值实根。因而频率 P 有四个值$\pm P_1$及 $\pm P_2$。对应于P_1^2与P_2^2值，通过(2.51)式均可计算出 A_2与A_1 的比值。若令对应于P_1^2的$A_2^{+(1)}$与$A_1^{+(1)}$（或$A_2^{-(1)}$与$A_1^{-(1)}$）的比值为b_1；对应于P_2^2的$A_2^{+(2)}$与$A_1^{+(2)}$(或$A_2^{-(2)}$与$A_1^{-(2)}$)的比值为b_2，那么

$$\begin{cases}b_1=\dfrac{A_2^{+(1)}}{A_1^{+(1)}}=\dfrac{A_2^{-(1)}}{A_1^{-(1)}}=\dfrac{-(a_{11})_0P_1^2+(c_{11})_0}{-(a_{12})_0P_1^2+(c_{12})_0}=\dfrac{-(a_{12})_0P_1^2+(c_{12})_0}{-(a_{22})_0P_1^2+(c_{22})_0}\\b_2=\dfrac{A_2^{+(2)}}{A_1^{+(2)}}=\dfrac{A_2^{-(2)}}{A_1^{-(2)}}=\dfrac{-(a_{11})_0P_2^2+(c_{11})_0}{-(a_{12})_0P_2^2+(c_{12})_0}=\dfrac{-(a_{12})_0P_2^2+(c_{12})_0}{-(a_{22})_0P_2^2+(c_{22})_0}\end{cases}\tag{2.53}$$

因此，对应于$\pm P_1$，$\pm P_2$四个可能值就可得（2.49）方程式的通解为

$$\begin{cases}q_1=A_1^{+(1)}e^{iP_1t}+A_1^{-(1)}e^{-iP_1t}+A_1^{+(2)}e^{iP_2t}+A_1^{-(2)}e^{-iP_2t}\\q_2=A_2^{+(1)}e^{iP_1t}+A_2^{-(1)}e^{-iP_1t}+A_2^{+(2)}e^{iP_2t}+A_2^{-(2)}e^{-iP_2t}\end{cases}$$

或

$$\begin{cases}q_1=A_1^{+(1)}e^{iP_1t}+A_1^{-(1)}e^{-iP_1t}+A_1^{+(2)}e^{iP_2t}+A_1^{-(2)}e^{-iP_2t}\\q_2=b_1A_1^{+(1)}e^{iP_1t}+b_1A_1^{-(1)}e^{-iP_1t}+b_2A_1^{+(2)}e^{iP_2t}+b_2A_1^{-(2)}e^{-iP_2t}\end{cases}\tag{2.54}$$

其中$A_1^{+(1)}$、$A_1^{-(1)}$、$A_1^{+(2)}$、$A_1^{-(2)}$ 为四个积分常数，由初始条件确定。若利用 欧勒公式 $e^{\pm iPt}=\cos pt\pm i\sin pt$，那么（2.54）式又可表示为

$$\begin{cases}q_1=a_1^{(1)}\sin(P_1t+\beta_1)+a_1^{(2)}\sin(P_2t+\beta_2)\\q_2=b_1a_1^{(1)}\sin(P_1t+\beta_1)+b_2a_1^{(2)}\sin(P_2t+\beta_2)\end{cases}\tag{2.55}$$

式中$a_1^{(1)}$，$a_1^{(2)}$，β_1，β_2四个积分常数，同样可由初始条件确定。

由（2.55）式可以清楚地看到，各个广义坐标均在作振动。该振动是以不同的园频率P_1和P_2的简谐振动迭加而成。在通常的情况下，P_1和P_2是不可通约的。因此，从振动理论得知，这种运动不是简谐振动。

三、多自由度质点组

设由N个质点所组成的稳定保守质点组，具有 n 个自由度，核选q_1，q_2，…，q_n为相应的广义坐标。那么，质点组的动能为

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j\tag{2.56}$$

由（2.28）式得知上式中系数a_{ij}是广义坐标q_1，q_2，…，q_n的函数，而且$a_{ij}=a_{ji}$。

质点组的势能为

$$V=V(q_1, q_2, \cdots, q_n)$$

由于在平衡位置势能具有极小值，故从

$$\frac{\partial V}{\partial q_i}=0 \quad (i=1, 2, \cdots, n)（平衡条件）$$

可解出质点组的平衡位置（q_{10}，q_{20}，…，q_{n0}）。为了简便起见，我们适当选取广义坐标的原点使得平衡位置刚好对应于

$$(q_{10}, q_{20}, \cdots, q_{n0})=(0, 0, \cdots, 0)$$

如$a_{ij}(q_1, q_2, \cdots, q_n)$在平衡位置（0，0，0，…，0）附近展开为泰勒级数

$$a_{ij}=(a_{ij})_0+\sum_{r=1}^{n}\left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial q_r}\right)_0 q_r+\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 a_{ij}}{\partial q_r \partial q_s}\right)_0 q_r q_s+\cdots$$

式中$(a_{ij})_0$，$\left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial q_r}\right)_0$，$\left(\frac{\partial^2 a_{ij}}{\partial q_r \partial q_s}\right)_0$，…，分别表示$a_{ij}$及其导数在平衡位置（0，0，…，0）处的数值。

同样，把势能$V(q_1, q_2, \cdots, q_n)$也在平衡位置（0，0，…，0）附近展开为泰勒级数

$$V=V(0, 0, \cdots, 0)+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial V}{\partial q_i}\right)_0 q_i+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right)_0 \cdot q_i q_j+\cdots \tag{2.57}$$

式中$V(0, 0, \cdots, 0)$，$\left(\frac{\partial V}{\partial q_i}\right)_0$，$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right)_0$，…，分别表示$V(q_i)$及其导数在平衡位置（0，0，…，0）处的数值。

由于我们所研究的是在稳定的平衡位置附近的小振动，所以q_i与$\dot{q}_i$均为一阶微量。若只保留到二阶微量，并把平衡条件代入，那么（2.56）式与（2.57）式分别为表示为

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij})_0 \dot{q}_i \dot{q}_j \tag{2.58}$$

$$V=V(0, 0, \cdots, 0)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(C_{ij})_0 q_i q_j \tag{2.59}$$

式中$(a_{ij})_0$称为广义的惯量（常数），而$(C_{ij})_0=\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right)_0$称为广义的刚度系数（常数）。于是，质点组的拉格朗日函数为

$$L=T-V=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij})_0 \dot{q}_i \dot{q}_j-V(0, 0, \cdots, 0)-$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(c_{ij})_0 q_i q_j \tag{2.60}$$

将（2.60）式代入拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0 \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

得

$$\sum_{j=1}^{n}[(a_{ij})_0\ddot{q}_j+(c_{ij})_0 q_j]=0 \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{2.61}$$

这就是具有n个自由度的稳定保守组在稳定平衡位置附近小振动的运动微分方程。

由于上述微分方程组是二阶线性齐次常微分方程，其解要求具有振动的形式，所以它的特解形式可设为

$$q_j=A_j e^{ipt} \qquad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{2.62}$$

式中A_j与P为常数。将（2.62）式代入（2.61）式并消去e^{ipt}便得

$$\sum_{j=1}^{n}A_j[-(a_{ij})_0P^2+(c_{ij})_0]=0 \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{2.63}$$

大家知道，要使这个关于未知量A_j的线性齐次代数方程组有非零解，必须满足其系数行列式为零。即

$$\begin{vmatrix} -(a_{11})_0P^2+(c_{11})_0, & -(a_{12})_0P^2+(c_{12})_0, & \cdots, & -(a_{1n})_0P^2+(c_{1n})_0 \\ -(a_{21})_0P^2+(c_{21})_0, & -(a_{22})_0P^2+(c_{22})_0, & \cdots, & -(a_{2n})_0P^2+(c_{2n})_0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -(a_{n1})_0P^2+(c_{n1})_0, & -(a_{n2})_0P^2+(c_{n2})_0, & \cdots, & -(a_{nn})_0P^2+(c_{nn})_0 \end{vmatrix}=0 \tag{2.64}$$

上式就称为**特征方程**，或**频率方程**，或有时也称为**久期方程**。理论上可以证明，在已有假设的条件下，所有方程式（2.64）的根将为正值。因而，所有的P均为实数。于是，解（2.64）方程式就可以求得$2n$个P的本征值P_α（$\alpha=1,\ 2,\ \cdots,\ 2n$）。将这些值中的任一个$P_\alpha$代入方程式（2.63）中，就可求得（2.63）式的$2n$个组的解中的一组解，也即$A^{(\alpha)}$的n个值：

$$A_1^{(\alpha)},\ A_2^{(\alpha)},\ \cdots,\ A_n^{(\alpha)}$$

因此，根据常微分方程的理论，我们便得到方程（2.61）的通解

$$q_j=\sum_{\alpha=1}^{2n}A_j^{(\alpha)}\exp(ip_\alpha t)\ (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{2.65}$$

下面我们举一些典型的例子，来说明如何运用拉格朗日方程解质点组在稳定平衡位置附近的小振动问题。

例1. 三线在C点相连接：其中两根线分别跨过不大的滑轮A及B，在线端各悬一物，其质量同为m_1；第三根线端点卦有质量为m_2的重物，$m_2<2m_1$。求此系统在平衡

位置附近作微振动时的周期，若$OA=OB=a$。

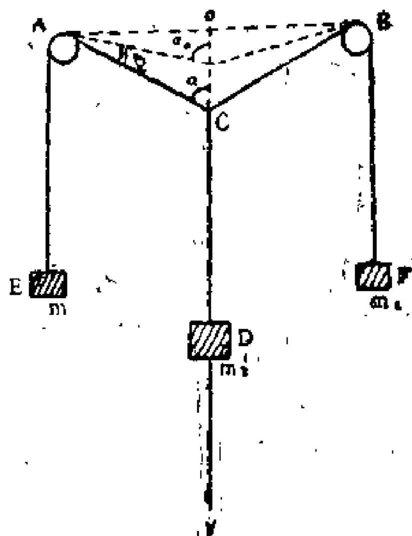


图1.25

解：选如图2.25所示的坐标系，并设绳子EAC段的长为l，那么重物m_2与重物m_1的纵坐标分别为

$$y_2=a\text{ctg}\alpha+\overline{CD}$$

$$y_1=l-\frac{a}{\sin\alpha}$$

于是，若把二重物m_1与重物m_2以及绳子视为一个质点组（或称系统）时，显然它具有一个自由度，故选α为相应的广义坐标。因此，系统的动能为

$$T=2\cdot\frac{1}{2}m_1\dot{y}_1^2+\frac{1}{2}m_2\dot{y}_2^2$$

即
$$T=\frac{1}{2}\left[\frac{(2m_1\cos^2\alpha+m_2)a^2}{\sin^4\alpha}\right]\dot{\alpha}^2 \tag{1}$$

此时
$$a_{11}=\frac{(2m_1\cos^2\alpha+m_2)\ a^2}{\sin^4\alpha}$$

若$\alpha=\alpha_0$处为系统的平衡位置时，那么

$$(a_{11})_{\alpha_0}=\frac{(2m_1\cos^2\alpha_0+m_2)a^2}{\sin^4\alpha_0}$$

于是，系统的动能可表示为

$$T=\frac{1}{2}\cdot\frac{(2m_1\cos^2\alpha_0+m_2)a^2}{\sin^4\alpha_0}\dot{\alpha}^2 \tag{2}$$

若选O点为系统势能的参考点时，那么系统的势能为

$$V=-2m_1gy_1-m_2gy_2=-2m_1g\left(l-\frac{a}{\sin\alpha}\right)-m_2g\left(a\text{ctg}\alpha+\overline{CD}\right)$$

因而
$$\frac{\partial V}{\partial\alpha}=\frac{ga(m_2-2m_1\cos\alpha)}{\sin^2\alpha}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial\alpha^2}=-\frac{2\sin\alpha\cos\alpha ga}{\sin^4\alpha}(m_2-2m_1\cos\alpha)+\frac{ga}{\sin^2\alpha}(2m_1\sin\alpha)$$

依平衡条件

$$\left(\frac{\partial V}{\partial\alpha}\right)_{\alpha_0}=0$$

得
$$m_2-2m_1\cos\alpha_0=0 \tag{3}$$

所以
$$(C_{11})_{\alpha_0}=\left(\frac{\partial^2 V}{\partial\alpha^2}\right)_{\alpha_0}=\frac{2m_1ga}{\sin\alpha_0} \tag{4}$$

故系统的势能V在$\alpha=\alpha_0$处展为泰勒级数并保留到二阶微量时为

$$V=-2m_1g\left(l-\frac{a}{\sin\alpha_0}\right)-m_2g\left(a\text{ctg}\alpha_0+\overline{CD}\right)+\frac{1}{2}\cdot\frac{2m_1ga}{\sin\alpha_0}(\alpha-\alpha_0)^2 \tag{5}$$

若把（3）式代入（2）式，那么系统的动能又可改写为

$$T=\frac{1}{2}\cdot\frac{(2m_1\cos^2\alpha_0+m_2)a^2}{\sin^4\alpha_0}\dot{\alpha}^2$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{(m_2\cos\alpha_0+m_2)a^2}{\sin^2\alpha_0(1-\cos^2\alpha_0)}\dot{\alpha}^2$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{m_2(1+\cos\alpha_0)a^2}{(1+\cos\alpha_0)(1-\cos\alpha_0)\sin^2\alpha_0}\dot{\alpha}^2$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{m_2a^2}{\sin^2\alpha_0(1-\cos\alpha_0)}\dot{\alpha}^2$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{m_2a^2}{\sin^2\alpha_0\left(1-\frac{m_2}{2m_1}\right)}\dot{\alpha}^2$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2m_1m_2a^2}{\sin^2\alpha_0(2m_1-m_2)}\dot{\alpha}^2 \qquad (6)$$

于是，系统的拉格朗日函数为

$$L=T-V=\frac{1}{2}\cdot\frac{2m_1m_2a^2}{\sin^2\alpha_0(2m_1-m_2)}\dot{\alpha}^2+2m_1g\left(1-\frac{a}{\sin\alpha_0}\right)+$$

$$+m_2g\left(a\,\mathrm{ctg}\alpha_0+\overline{CD}\right)-\frac{1}{2}\cdot\frac{2m_1ga}{\sin\alpha_0}(\alpha-\alpha_0)^2$$

由拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\alpha}}\right)-\frac{\partial L}{\partial\alpha}=0$$

得
$$\frac{a^2}{\sin^2\alpha_0}\cdot\frac{2m_1m_2}{(2m_1-m_2)}\ddot{\alpha}+\frac{2m_1ga}{\sin\alpha_0}(\alpha-\alpha_0)=0 \qquad (7)$$

由图示可知：$\alpha_0=\alpha+\beta$即$\alpha-\alpha_0=-\beta$，若令$\mu=\frac{m_1}{m_2}$那么（7）式又可表示为

$$\ddot{\beta}+\frac{g(2\mu-1)\sin\alpha_0}{a}\beta=0 \qquad (8)$$

由于$2m_1>m_2$即$2\mu>1$故$\omega^2=\frac{g(2\mu-1)\sin\alpha_0}{a}>0$ 因此，方程（8）为谐振方程，其振动周期为

$$\tau=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{a}{g(2\mu-1)\sin\alpha_0}}$$

例2. 考虑一根长为L、质量为m的均质杆的运动：杆的两端是约束在一个半径为R的铅直园环上运动。假定杆与园环之间是没有摩擦的，但重力是不可忽略的。求杆在平衡位置附近小振动的频率。

解：选如图2.26所示的坐标系，则杆AB质心C的坐标为

$$x_c=\overline{OC}\cdot\sin\varphi=\sqrt{R^2-\left(\frac{L}{2}\right)^2}\cdot\sin\varphi$$

$$y_c=\overline{OC}\cdot\cos\varphi=\sqrt{R^2-\left(\frac{L}{2}\right)^2}\cdot\cos\varphi$$

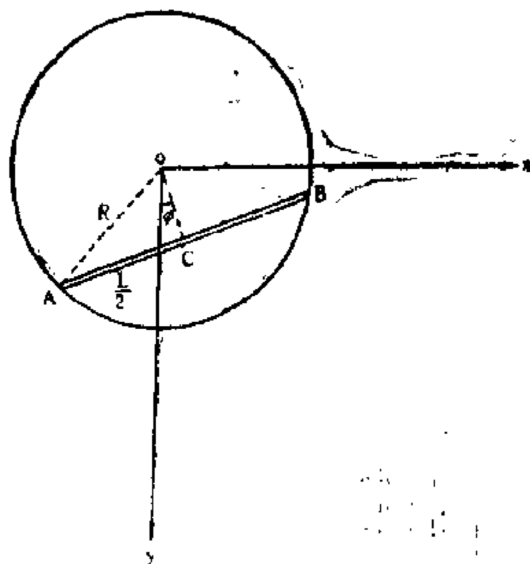


图2.26

所以

$$\begin{cases}\dot{x}_c=\frac{1}{2}\sqrt{4R^2-L^2}\cos\varphi\dot{\varphi}\\ \dot{y}_c=-\frac{1}{2}\sqrt{4R^2-L^2}\sin\varphi\dot{\varphi}\end{cases}$$

于是，AB杆质心C的速度为

$$V_C=\sqrt{\dot{x}_c^2+\dot{y}_c^2}=\frac{1}{2}\sqrt{4R^2-L^2}\dot{\varphi}$$

由此可见，杆AB具有一个自由度，故选φ为广义坐标。

由于杆是作平面平行运动，故动能为

$$T=\frac{1}{2}mV_c^2+\frac{1}{2}J_c\dot{\varphi}^2 \tag{1}$$

式中J_c为杆AB对过质心C且垂直于杆的对称轴的转动惯量。$\dot{\varphi}$为杆AB绕过其质心且垂直于杆的对称轴的转动角速度。于是，（1）式又可表示为

$$T=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}m(4R^2-L^2)\dot{\varphi}^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12}mL^2\dot{\varphi}^2$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}m(6R^2-L^2)\dot{\varphi}^2 \tag{2}$$

若选0点为势能的参考点，那么杆AB的势能为

$$V=-mgy_c=-\frac{1}{2}\sqrt{4R^2-L^2}mg\cos\varphi$$

因而 $$\frac{\partial V}{\partial\varphi}=\frac{1}{2}\sqrt{4R^2-L^2}mg\sin\varphi$$

$$\frac{\partial^2V}{\partial\varphi^2}=\frac{1}{2}\sqrt{4R^2-L^2}mg\cos\varphi$$

由平衡条件 $\frac{\partial V}{\partial \varphi}=0$　得 $\varphi=0$　为杆的平衡位置。于是，$(C_{11})_0=\left(\frac{\partial^2 V}{\partial^2 \varphi}\right)_0=$

$=\frac{1}{2}\sqrt{4R^2-L^2}\cdot mg$，因此势能$V$在平衡位置$\varphi=0$附近展开为泰勒级数并保留到二阶微量时为

$$V=V(0)+\left(\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)_0\varphi+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial^2 \varphi}\right)_0\varphi^2$$

$$=-\frac{1}{2}\sqrt{4R^2-L^2}\,mg+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{4R^2-L^2}\,mg\varphi^2 \tag{3}$$

故杆AB的拉格朗日函数为

$$L=T-V=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}m(6R^2-L^2)\dot{\varphi}^2+\frac{1}{2}\sqrt{4R^2-L^2}\,mg-$$

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{4R^2-L^2}\,mg\varphi^2$$

由拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \varphi}=0$$

得
$$\frac{1}{6}m(6R^2-L^2)\ddot{\varphi}+\frac{1}{2}\sqrt{4R^2-L^2}\,mg\varphi=0$$

即
$$\ddot{\varphi}+\frac{3\sqrt{4R^2-L^2}\,g}{6R^2-L^2}\varphi=0$$

由题设得知$2R>L$，所以$\omega^2=\frac{3\sqrt{4R^2-L^2}\,g}{6R^2-L^2}>0$故上述方程为谐振方程。于是，其圆频率为

$$\omega=\sqrt{\frac{3\sqrt{4R^2-L^2}\,g}{6R^2-L^2}}$$

振动周期为

$$\tau=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\Big/\sqrt{\frac{3\sqrt{4R^2-L^2}\,g}{6R^2-L^2}}=2\pi\sqrt{\frac{6R^2-L^2}{3\sqrt{4R^2-L^2}\,g}}$$

例3. 一半径为r、质量为M的皮带轮绕水平轴O旋转；轮上绕以绳，绳的自由端悬一质量为m的物体。轮之重心C到轴O的距离等于a，且$\frac{a}{r}>\frac{m}{M}$。皮带轮对转动轴的转动惯量等于J_0。试求该系统绕平衡位置所作的微振动的周期。

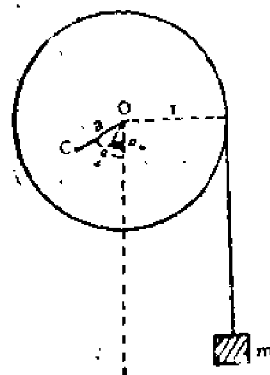


图2.27

解： 把重物与皮带轮视为一个质点组（即系统），此系统具有一个自由度，故选α为广义坐标，如图2.27所示。

系统的动能为

$$T=\frac{1}{2}J_0\dot{\alpha}^2+\frac{1}{2}mv^2$$

式中 $\dot{\alpha}$为皮带轮绕水平轴O的转动角速度，v为重物m的质心速度。由于绳子是不可伸长且与皮带轮之间没有相对滑动，所以$v=r\dot{\alpha}$。于是，动能又可表示为

$$T=\frac{1}{2}(J_0+mr^2)\dot{\alpha}^2 \tag{1}$$

若选水平轴0为势能的参考位置时，那么系统的势能为

$$V=-Mga\cos\alpha-mg(h+r\alpha)$$

式中h为$\alpha=0$时，重物m到转轴0的距离（常数）。因而

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha}=Mga\sin\alpha-mgr$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \alpha^2}=Mga\cos\alpha$$

由平衡条件 $\frac{\partial V}{\partial \alpha}=0$ 得 $Mga\sin\alpha_0-mgr=0$ 即 $\sin\alpha_0=\frac{mr}{Ma}$，$\alpha_0$ 为平衡位置。于是，

$(C_{11})_0=\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \alpha^2}\right)_{\alpha_0}=Mga\cos\alpha_0$ 故势能V在平衡位置$\alpha=\alpha_0$附近展为泰勒级数并保留到二阶微量时为

$$V=V_{\alpha_0}+\left(\frac{\partial V}{\partial \alpha}\right)_{\alpha_0}(\alpha-\alpha_0)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \alpha^2}\right)_{\alpha_0}(\alpha-\alpha_0)^2$$

$$=-Mga\cos\alpha_0-mg(h+r\alpha_0)+\frac{1}{2}Mga\cos\alpha_0(\alpha-\alpha_0)^2 \tag{2}$$

因此，系统的拉格日函数为

$$L=T-V=\frac{1}{2}(J_0+mr^2)\dot{\alpha}^2+Mga\cos\alpha_0+mg(h+\alpha_0 r)-$$

$$-\frac{1}{2}Mga\cos\alpha_0(\alpha-\alpha_0)^2$$

由拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \alpha}=0$$

得 $$(J_0+mr^2)\ddot{\alpha}+Mga\cos\alpha_0(\alpha-\alpha_0)=0 \tag{3}$$

由图2.27可知：$\alpha-\alpha_0=\beta$，所以(3)式可改写为

$$(J_0+mr^2)\ddot{\beta}+Mga\cos\alpha_0\beta=0$$

即 $$\ddot{\beta}+\frac{Mga\cos\alpha_0}{J_0+mr^2}\beta=0 \tag{4}$$

因为 $\omega^2=\frac{Mga\cos\alpha_0}{J_0+mr^2}>0$，所以，上述方程为谐振方程。故其振动周期为

$$\tau=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{J_0+mr^2}{Mga\cos\alpha_0}}$$

例4. 半径为r质量为m的均质半球，其凸面可以在水平面上无滑动地滚动。设半球对过其重心C的水平轴的回转半径为k，求半球在稳定平衡位置附近的小振动周期。（提

示：半球的重心C与球的中心O之间的距离为$\frac{3}{8}r$）。

解：把半球视为一个系统。显然此系统具有一个自由度，故选φ为广义坐标，如图2.28所示。由于半球是作平面平行运动，A点为瞬心，所以质心C的速度为

$$V_c=\overline{AC}\,\dot{\varphi}=\sqrt{r^2+\left(\frac{3}{8}r\right)^2-2r\cdot\frac{3}{8}r\cos\varphi}\;\dot{\varphi}$$

式中$\dot{\varphi}$为半球绕过其质心的转动轴的转动角速度（当然也是绕瞬心A转动的角速度）。于是，系统的动能为

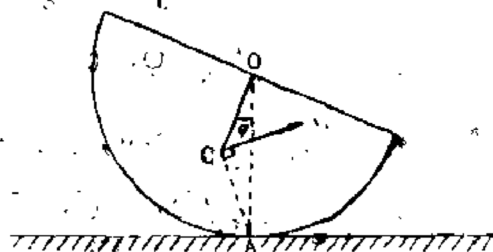


图2.28

$$T=\frac{1}{2}mV_c^2+\frac{1}{2}J_c\dot{\varphi}^2$$

式中J_c为半球对过其质心C的水平轴的转动惯量。由于题设得知$J_c=mk^2$，因此，上述动能的表达式又可表示为

$$T=\frac{1}{2}m\left[r^2+\left(\frac{3}{8}r\right)^2-2r\cdot\frac{3}{8}r\cos\varphi+k^2\right]\dot{\varphi}^2$$

此时 $$a_{11}=m\left[r^2+\left(\frac{3}{8}r\right)^2-2r\cdot\frac{3}{8}r\cos\varphi+k^2\right]$$

若设水平面为势能的参考面时，那么系统的势能为

$$V=mg\left(r-\frac{3}{8}r\cos\varphi\right)$$

因而 $$\frac{\partial V}{\partial\varphi}=mg\cdot\frac{3}{8}r\sin\varphi$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}=mg\cdot\frac{3}{8}r\cos\varphi$$

由平衡条件 $\frac{\partial V}{\partial\varphi}=0$ 即 $mg\cdot\frac{3}{8}r\sin\varphi=0$

得$\varphi=0$为平衡位置。所以

$$(C_{11})_0=\left(\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}\right)_0=mg\cdot\frac{3}{8}r$$

$$(a_{11})_0=m\left[r^2+\left(\frac{3}{8}r\right)^2-2r\cdot\frac{3}{8}r+k^2\right]=m\left[\left(\frac{5}{8}r\right)^2+k^2\right]$$

因此，动能与势能在平衡位置$\varphi=0$附近展开为泰勒级数并保留到二阶微量时为

$$T=\frac{1}{2}m\left[\left(\frac{5}{8}r\right)^2+k^2\right]\dot{\varphi}^2$$

$$V=V(0)+\left(\frac{\partial V}{\partial\varphi}\right)_0\varphi+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}\right)_0\varphi^2=mg\left(r-\frac{3}{8}r\right)$$

$$+\frac{1}{2}mg\cdot\frac{3}{8}r\varphi^2$$

于是，系统的拉格朗日函数为

$$L=T-V=\frac{1}{2}m\left[\left(\frac{5}{8}r\right)^2+k^2\right]\dot{\varphi}^2-mg\left(r-\frac{3}{8}r\right)-\frac{1}{2}mg\cdot\frac{3}{8}r\varphi^2$$

由拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial L}{\partial\varphi}=0$$

$$m\left[\left(\frac{5}{8}r\right)^2+k^2\right]\ddot{\varphi}+\frac{3}{8}mgr\varphi=0$$

即 $$\ddot{\varphi}+\frac{24rg}{25r^2+64k^2}\varphi=0$$

显然， $\omega^2=\dfrac{24rg}{25r^2+64k^2}>0$， 故上述方程为谐振方程。于是，其振动周期为

$$\tau=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{25r^2+64k^2}{24rg}}$$

例5. 椭园摆由一滑块和一小球所组成。滑块的质量为m_1，可无摩擦地沿水平面滑动；小球质量为m_2，用长l的杆AB和滑块相连。杆AB能绕与图面垂直且与滑块相连的A轴转动。不计杆的质量，试用拉格朗日方程列出椭园摆的运动微分方程，并求它在平衡位置附近的小振动周期。

解： 由于系统具有两个自由度，故选滑块A的横坐标y_1与杆AB的摆角φ为相应的广义坐标，如图2.29所示。于是，小球B的坐标为

$$\begin{cases}x_2=l\cos\varphi\\ y_2=y_1+l\sin\varphi\end{cases}$$

故有 $$\dot{x}_2=-l\sin\varphi\ \dot{\varphi}$$

$$\dot{y}_2=\dot{y}_1+l\cos\varphi\ \dot{\varphi}$$

因此，系统的动能可表示为

$$T=\frac{1}{2}m_1\dot{y}_1^2+\frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2+\dot{y}_2^2)$$

图2.29

$$=\frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{y}_1^2+\frac{1}{2}m_2l^2\dot{\varphi}^2+m_2l\dot{y}_1\dot{\varphi}\cos\varphi \qquad (1)$$

此时 $a_{11}=m_1+m_2$， $a_{12}=m_2l\cos\varphi$， $a_{22}=m_2l^2$

若选水平轴y为势能的参考点时，那么系统的势能为

$$V=-m_2gx_2=-m_2gl\cos\varphi \qquad (2)$$

因而 $$\frac{\partial V}{\partial\varphi}=m_2gl\sin\varphi$$

$$\frac{\partial^2V}{\partial\varphi^2}=m_2gl\cos\varphi$$

由平衡条件$\dfrac{\partial V}{\partial\varphi}=0$即$m_2gl\sin\varphi=0$得$\varphi=0$为平衡位置。所以

$$(C_{22})_0=\left(\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}\right)_0=m_2gl$$

$$(a_{11})_0=m_1+m_2$$

$$(a_{12})_0=m_2l$$

$$(a_{22})_0=m_2l^2$$

因此，系统的动能与势能在平衡位置$\varphi=0$附近展开为泰勒级数并保留到二阶微量时为

$$T=\frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{y}_1^2+\frac{1}{2}m_2l^2\dot{\varphi}^2+m_2l\dot{y}_1\dot{\varphi}$$

$$V=V(0)+\left(\frac{\partial V}{\partial\varphi}\right)_0\varphi+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}\right)_0\varphi^2=-m_2gl+\frac{1}{2}m_2gl\varphi^2$$

于是，系统的拉格朗日函数为

$$L=T-V=\frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{y}_1^2+\frac{1}{2}m_2l^2\dot{\varphi}^2+m_2l\dot{y}_1\dot{\varphi}+m_2gl-\frac{1}{2}m_2gl\varphi^2$$

由拉格朗日方程

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial\dot{y}_1}\right)-\dfrac{\partial L}{\partial y_1}=0\\[2ex]\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\right)-\dfrac{\partial L}{\partial\varphi}=0\end{cases}$$

得
$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}[(m_1+m_2)\dot{y}_1+m_2l\dot{\varphi}]=0\\[2ex]\dfrac{d}{dt}[m_2l^2\dot{\varphi}+m_2l\dot{y}_1]+m_2gl\varphi=0\end{cases}$$

即
$$\begin{cases}(m_1+m_2)\ddot{y}_1+m_2l\ddot{\varphi}=0\\ l\ddot{\varphi}+\ddot{y}_1+g\varphi=0\end{cases}\tag{3}$$

消去方程组（3）中的$\ddot{y}_1$便得

$$-(m_1+m_2)(l\ddot{\varphi}+g\varphi)+m_2l\ddot{\varphi}=0$$

即
$$m_1l\ddot{\varphi}+(m_1+m_2)g\varphi=0\tag{4}$$

或
$$\ddot{\varphi}+\frac{(m_1+m_2)g}{m_1l}\varphi=0\tag{5}$$

显然，$\omega^2=\dfrac{(m_1+m_2)g}{m_1l}>0$，故上述方程为谐振方程．于是，小振动的周期为

$$\tau=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{m_1l}{(m_1+m_2)g}}$$

由此可见，当$m_1\gg m_2$时，也即m_1的惯性很大，在运动的过程中，它的加速度可以略去不计，这就相当于摆的悬挂点固定不动的情况，因而τ趋于单摆的周期，即

$$\tau=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

例 6：质点 M_1，其质量为 m_1，用长 l_1 之绳系在固定点 O。在质点 M_1 上用长 l_2 的绳系另一质点 M_2，其质量为 m_2。以绳与铅垂面所成的角度 θ_1 及 θ_2 为参变数，求此系在铅垂面内的微振动方程式，并求在 $l_2=l_1$ 及 $m_2=m_1$ 时此系的主振动周期。

解：由于系统具有二个自由度，故选 θ_1 与 θ_2 为相应的广义坐标，如图2.30所示。于是，质点 M_1 的坐标可表为

$$\begin{cases} x_1=l_1\sin\theta_1 \\ y_1=l_1\cos\theta_1 \end{cases}$$

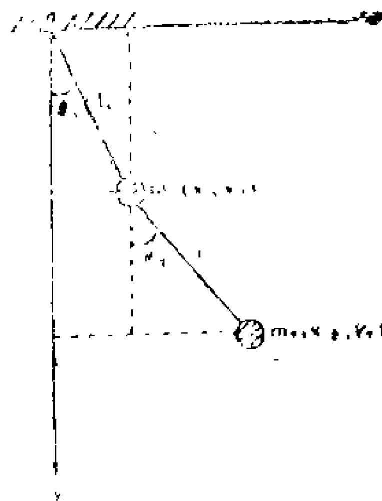


图2.30

其速度为

$$\begin{cases} \dot{x}_1=l_1\cos\theta_1\dot{\theta}_1 \\ \dot{y}_1=-l_1\sin\theta_1\dot{\theta}_1 \end{cases}$$

质点 M_2 的坐标可表为

$$\begin{cases} x_2=l_1\sin\theta_1+l_2\sin\theta_2 \\ y_2=l_1\cos\theta_1+l_2\cos\theta_2 \end{cases}$$

其速度为

$$\begin{cases} \dot{x}_2=l_1\cos\theta_1\dot{\theta}_1+l_2\cos\theta_2\dot{\theta}_2 \\ \dot{y}_2=-l_1\sin\theta_1\dot{\theta}_1-l_2\sin\theta_2\dot{\theta}_2 \end{cases}$$

从而系统的动能可写为

$$T=\frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1^2+\dot{y}_1^2)+\frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2+\dot{y}_2^2)$$

$$=\frac{1}{2}(m_1+m_2)l_1^2\dot{\theta}_1^2+\frac{1}{2}m_2l_2^2\dot{\theta}_2^2+m_2l_1l_2\cos(\theta_2-\theta_1)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2$$

此时 $a_{11}=(m_1+m_2)l_1^2$，$a_{12}=m_2l_1l_2\cos(\theta_2-\theta_1)$，$a_{22}=m_2l_2^2$

若选 O 点为势能的参考点时，那么系统的势能为

$$V=-m_1gy_1-m_2gy_2=-(m_1+m_2)gl_1\cos\theta_1-m_2gl_2\cos\theta_2$$

因而 $\quad \dfrac{\partial V}{\partial\theta_1}=(m_1+m_2)gl_1\sin\theta_1,\qquad \dfrac{\partial^2V}{\partial\theta_1^2}=(m_1+m_2)gl_1\cos\theta_1$

$$\frac{\partial V}{\partial\theta_2}=m_2gl_2\sin\theta_2,\qquad \frac{\partial^2V}{\partial\theta_2^2}=m_2gl_2\cos\theta_2$$

$$\frac{\partial^2V}{\partial\theta_1\partial\theta_2}=0$$

由平衡条件 $\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial\theta_1}=0 \\ \dfrac{\partial V}{\partial\theta_2}=0 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} (m_1+m_2)gl_1\sin\theta_1=0 \\ m_2gl_2\sin\theta_2=0 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} \theta_1=0 \\ \theta_2=0 \end{cases}$

为平衡位置。于是，得

$$(a_{12})_0=m_2l_1l_2,\qquad (c_{11})_0=\left(\frac{\partial^2V}{\partial\theta_1^2}\right)_0=(m_1+m_2)gl_1$$

$$(c_{22})_0=\left(\frac{\partial^2 V}{\partial\theta_2^2}\right)_0=m_2gl_2,\qquad (c_{12})_0=\left(\frac{\partial^2 V}{\partial\theta_1\partial\theta_2}\right)_0=0$$

因此，系统的动能与势能分别在平衡位置(0, 0)附近展开为泰勒级数并保留到二阶微量时得

$$T=\frac{1}{2}(m_1+m_2)l_1^2\dot{\theta}_1^2+\frac{1}{2}m_2l_2^2\dot{\theta}_2^2+m_2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2$$

$$V=V(0,0)+\left(\frac{\partial V}{\partial\theta_1}\right)_0\theta_1+\left(\frac{\partial V}{\partial\theta_2}\right)_0\theta_2+\frac{1}{2}[(c_{11})_0\theta_1^2+2(c_{12})_0\theta_1\theta_2+(c_{22})_0\theta_2^2]$$

$$=-(m_1+m_2)gl_1-m_2gl_2+\frac{1}{2}[(m_1+m_2)gl_1\theta_1^2+m_2gl_2\theta_2^2]$$

于是，系统的拉格朗日函数为

$$L=T-V=\frac{1}{2}(m_1+m_2)l_1^2\dot{\theta}_1^2+\frac{1}{2}m_2l_2^2\dot{\theta}_2^2+m_2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2+$$

$$+(m_1+m_2)gl_1+m_2gl_2-\frac{1}{2}[(m_1+m_2)gl_1\theta_1^2+m_2gl_2\theta_2^2]$$

由拉格朗日方程

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial\dot{\theta}_1}\right)-\dfrac{\partial L}{\partial\theta_1}=0\\[2ex]\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial\dot{\theta}_2}\right)-\dfrac{\partial L}{\partial\theta_2}=0\end{cases}$$

得

$$\begin{cases}(m_1+m_2)l_1^2\ddot{\theta}_1+m_2l_1l_2\ddot{\theta}_2+(m_1+m_2)gl_1\theta_1=0\\ m_2l_1l_2\ddot{\theta}_1+m_2l_2^2\ddot{\theta}_2+m_2gl_2\theta_2=0\end{cases}\tag{1}$$

此方程组是二阶线性齐次常系数常微分方程，其解要求具有振动的形式，故它的特解形式可设为

$$\theta_1=A_1e^{ipt},\qquad \theta_2=A_2e^{ipt}\tag{2}$$

把（2）式代入（1）式并消去 e^{ipt} 便得

$$\begin{cases}(m_1+m_2)l_1(g-l_1p^2)A_1-m_2l_1l_2p^2A_2=0\\ -m_2l_1l_2p^2A_1+m_2l_2(g-l_2p^2)A_2=0\end{cases}\tag{3}$$

要使 A_1、A_2 有非零解必须满足

$$\begin{vmatrix}(m_1+m_2)l_1(g-l_1p^2), & -m_2l_1l_2p^2\\ -m_2l_1l_2p^2, & m_2l_2(g-l_2p^2)\end{vmatrix}=0$$

展开上式并经整理得

$$p^4-\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)\left(\frac{1}{l_2}+\frac{1}{l_1}\right)gp^2+\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)\frac{g^2}{l_1l_2}=0\tag{4}$$

设 p_1 与 p_2 是上述频率方程的正根，由（3）式可得

$$\frac{A_1^{(1)}}{A_2^{(1)}}=\frac{g-l_2p_1^2}{l_1p_1^2},\qquad \frac{A_1^{(2)}}{A_2^{(2)}}=\frac{g-l_2p_2^2}{l_1p_2^2}$$

因此方程组（1）的通解可表示为

$$\theta_1 = c_1(g - l_2 p_1^2)\sin(p_1 t + \alpha_1) + c_2(g - l_2 p_2^2)\sin(p_2 t + \alpha_2)$$
$$\theta_2 = c_1 l_1 p_1^2 \sin(p_1 t + \alpha_1) + c_2 l_1 p_2^2 \sin(p_2 t + \alpha_2)$$

式中 c_1、c_2 为积分常数，由初始条件确是。

当 $m_1 = m_2$，$l_1 = l_2$ 时，（4）式的解为

$$p^2 = \frac{2 \cdot \frac{2}{l_1} g \pm \sqrt{\left(\frac{4}{l_1} g\right)^2 - \frac{8}{l_1^2} g^2}}{2}$$
$$= \frac{g}{l_1}(2 \pm \sqrt{2})$$

故其正根为

$$p_1 = \sqrt{\frac{g}{l_1}(2 + \sqrt{2})}, \quad p_2 = \sqrt{\frac{g}{l_1}(2 - \sqrt{2})}$$

于是，主振动周期 $\tau_1 = \frac{2\pi}{p_1} = 2\pi\sqrt{\frac{l_1}{g(2 + \sqrt{2})}}$

主振动周期 $\tau_2 = \frac{2\pi}{p_2} = 2\pi\sqrt{\frac{l_1}{g(2 - \sqrt{2})}}$

例 7：两个相同的单摆，摆长为 l，其质量可略去不计，摆锤的质量为 m，用一个刚度系数为 C 的无重的弹簧在距悬挂点 h 的地方，将两摆柄相连。当二摆处在平衡位置时，弹簧恰无伸长和压缩，今在两摆平衡位置的平面内使其中一摆离开其平衡位置有一偏角 α，两摆均无初速地开始运动。试求此后该系统的微振动。

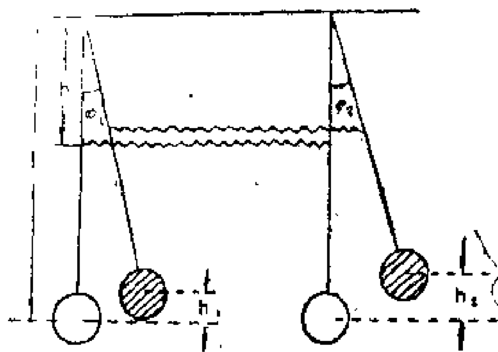


图 2.31

解：此耦合摆具有二个自由度，故选 φ_1，φ_2 为相应的广义坐标，如图2.31所示。系统的动能为

$$T = \frac{1}{2} m l^2 (\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2) \qquad (1)$$

式中 $\dot{\varphi}_1$，$\dot{\varphi}_2$ 分别表示两个单摆的摆动角速度。

若选平衡位置为系统势能的参考点时，那么系统的势能为

$$V = \frac{1}{2} c x^2 + mgh_1 + mgh_2$$
$$= \frac{1}{2} c h^2 (\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1)^2 + mgl[(1 - \cos\varphi_1) + (1 - \cos\varphi_2)]$$

因而 $\frac{\partial V}{\partial \varphi_1} = c h^2 (\sin\varphi_1 - \sin\varphi_2)\cos\varphi_1 + mgl\sin\varphi_1$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi_1^2} = c h^2 (\cos^2\varphi_1 + \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 - \sin^2\varphi_1) + (mgl\cos\varphi_1$$

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi_2}=ch^2(\sin\varphi_2-\sin\varphi_1)\cos\varphi_2+mgl\sin\varphi_2$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi_2^2}=ch^2(\cos^2\varphi_2+\sin\varphi_1\sin\varphi_2-\sin^2\varphi_2)+mgl\cos\varphi_2$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi_1\partial \varphi_2}=-ch^2\cos\varphi_1\cdot\cos\varphi_2$$

由平衡条件

$$\begin{cases}\dfrac{\partial V}{\partial \varphi_1}=0\\[2ex]\dfrac{\partial V}{\partial \varphi_2}=0\end{cases}\quad 即\quad \begin{cases}ch^2(\sin\varphi_1-\sin\varphi_2)\cos\varphi_1+mgl\sin\varphi_1=0\\ ch^2(\sin\varphi_2-\sin\varphi_1)\cos\varphi_2+mgl\sin\varphi_2=0\end{cases}$$

解得平衡位置为$\varphi_1=0$，$\varphi_2=0$。于是

$$(c_{11})_0=\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi_1^2}\right)_0=ch^2+mgl$$

$$(c_{22})_0=\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi_2^2}\right)_0=ch^2+mgl$$

$$(c_{12})_0=\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi_1\partial \varphi_2}\right)_0=-ch^2$$

因此，势能V在平衡位置(0,0)附近展开为泰勒级数并保留到二阶微量得

$$V=V(0,0)+\left(\frac{\partial V}{\partial \varphi_1}\right)_0\varphi_1+\left(\frac{\partial V}{\partial \varphi_2}\right)_0\varphi_2+\frac{1}{2}[(c_{11})_0\varphi_1^2+$$
$$+2(c_{12})_0\varphi_1\varphi_2+(c_{22})_0\varphi_2^2]$$

$$=\frac{1}{2}[(ch^2+mgl)\varphi_1^2-2ch^2\varphi_1\varphi_2+(ch^2+mgl)\varphi_2^2] \qquad (2)$$

于是，系统的拉格朗日函数为

$$L=T-V=\frac{1}{2}ml^2(\dot\varphi_1^2+\dot\varphi_2^2)-\frac{1}{2}[(ch^2+mgl)\varphi_1^2-2ch^2\varphi_1\varphi_2+$$
$$+(ch^2+mgl)\varphi_2^2]$$

由拉格朗日方程

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot\varphi_1}\right)-\dfrac{\partial L}{\partial \varphi_1}=0\\[2ex]\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot\varphi_2}\right)-\dfrac{\partial L}{\partial \varphi_2}=0\end{cases}$$

得

$$\begin{cases}ml^2\ddot\varphi_1+(mgl+ch^2)\varphi_1-ch^2\varphi_2=0\\ ml^2\ddot\varphi_2-ch^2\varphi_1+(mgl+ch^2)\varphi_2=0\end{cases}$$

或

$$\begin{cases}\ddot\varphi_1+\left(\dfrac{g}{l}+\dfrac{ch^2}{ml^2}\right)\varphi_1-\dfrac{ch^2}{ml^2}\varphi_2=0\\[2ex]\ddot\varphi_2-\dfrac{ch^2}{ml^2}\varphi_1+\left(\dfrac{g}{l}+\dfrac{ch^2}{ml^2}\right)\varphi_2=0\end{cases} \qquad (3)$$

此方程组为二阶线性齐次常系数的常微分方程，其解要求具有振动形式，所以它的特解形式可设为

$$\varphi_1 = A_1 e^{ipt} \quad , \qquad \varphi_2 = A_2 e^{ipt} \tag{4}$$

把（4）式代入（3）式并消去 e^{ipt} 便得

$$\left\{\begin{aligned} &\left[-p^2+\left(\frac{g}{l}+\frac{ch^2}{ml^2}\right)\right]A_1-\frac{ch^2}{ml^2}A_2=0 \\ &-\frac{ch^2}{ml^2}A_1+\left[-p^2+\left(\frac{g}{l}+\frac{ch^2}{ml^2}\right)\right]A_2=0 \end{aligned}\right. \tag{5}$$

要使 A_1、A_2 有非零解，必须满足其系数行列式为零。即

$$\begin{vmatrix} -p^2+\left(\frac{g}{l}+\frac{ch^2}{ml^2}\right) , & -\frac{ch^2}{ml^2} \\ -\frac{ch^2}{ml^2} , & -p^2+\left(\frac{g}{l}+\frac{ch^2}{ml^2}\right) \end{vmatrix}=0$$

展开得 $-p^2+\left(\frac{g}{l}+\frac{ch^2}{ml^2}\right)=\pm\left(-\frac{ch^2}{ml^2}\right)$

由此解出 p^2 的二个正实根：

$$p_1^2=\frac{g}{l} \quad , \qquad p_2^2=\frac{g}{l}+\frac{2ch^2}{ml^2}$$

于是，它们给出了 p 的四个可能值：

$$p_1=\pm\sqrt{\frac{g}{l}} \quad , \qquad p_2=\pm\sqrt{\frac{g}{l}+\frac{2ch^2}{ml^2}}$$

把 p_1^2 和 p_2^2 的数值代入（5）式可得

$$b_1=\frac{A_2^{(1)}}{A_1^{(1)}}=\frac{A_2^{-(1)}}{A_1^{-(1)}}=\frac{-p_1^2+\left(\frac{g}{l}+\frac{ch^2}{ml^2}\right)}{\frac{ch^2}{ml^2}}=\frac{\frac{ch^2}{ml^2}}{-p_1^2+\left(\frac{g}{l}+\frac{ch^2}{ml^2}\right)}=1$$

$$b_2=\frac{A_2^{(2)}}{A_1^{(2)}}=\frac{A_2^{-(2)}}{A_1^{-(2)}}=\frac{-p_2^2+\left(\frac{g}{l}+\frac{ch^2}{ml^2}\right)}{\frac{ch^2}{ml^2}}=\frac{\frac{ch^2}{ml^2}}{-p_2^2+\left(\frac{g}{l}+\frac{ch^2}{ml^2}\right)}=-1$$

因此方程（3）的通解为

$$\left\{\begin{aligned} \varphi_1 &= A_1^{(1)}e^{i\sqrt{\frac{g}{l}}t}+A_1^{-(1)}e^{-i\sqrt{\frac{g}{l}}t}+A_1^{(2)}e^{i\sqrt{\frac{g}{l}+\frac{2ch^2}{ml^2}}t}+ \\ &\qquad +A_1^{-(2)}e^{-i\sqrt{\frac{g}{l}+\frac{2ch^2}{ml^2}}t} \\ \varphi_2 &= A_1^{(1)}e^{i\sqrt{\frac{g}{l}}t}+A_1^{-(1)}e^{-i\sqrt{\frac{g}{l}}t}-A_1^{(2)}e^{i\sqrt{\frac{g}{l}+\frac{2ch^2}{ml^2}}t}- \end{aligned}\right. \tag{6}$$

$$-A_1^{-(2)}e^{-i\sqrt{\frac{g}{l}+\frac{2ch^2}{ml^2}}\,t}$$

式中$A_1^{+(1)}$、$A_1^{-(1)}$、$A_1^{+(2)}$、$A_1^{-(2)}$是积分常数．此通解还可以写成三角函数的形式

$$\begin{cases}\varphi_1=\alpha_1^{(1)}\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t+\beta_1\right)+\alpha_1^{(2)}\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}+\frac{2ch^2}{ml^2}}\,t+\beta_2\right)\\ \varphi_2=\alpha_1^{(1)}\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t+\beta_1\right)-\alpha_1^{(2)}\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}+\frac{2ch^2}{ml^2}}\,t+\beta_2\right)\end{cases} \qquad (7)$$

式中$\alpha_1^{(1)}$、$\alpha_1^{(2)}$、β_1、β_2为积分常数．

由初始条件$t=0$时，$(\varphi_1)=\alpha$，$(\varphi_2)_0=0$，$(\dot{\varphi}_1)_0=0$，$(\dot{\varphi}_2)_0=0$得

$$\begin{cases}A_1^{+(1)}+A_1^{-(1)}+A_1^{+(2)}+A_1^{-(2)}=\alpha & (8)\\ A_1^{+(1)}+A_1^{-(1)}-A_1^{+(2)}-A_1^{-(2)}=0 & (9)\\ i\sqrt{\frac{g}{l}}\,(A_1^{+(1)}-A_1^{-(1)})+i\sqrt{\frac{g}{l}+\frac{2ch^2}{ml^2}}\,(A_1^{+(2)}-A_1^{-(2)})=0 & (10)\\ i\sqrt{\frac{g}{l}}\,(A_1^{+(1)}-A_1^{-(1)})-i\sqrt{\frac{g}{l}+\frac{2ch^2}{ml^2}}\,(A_1^{+(2)}-A_1^{-(2)})=0 & (11)\end{cases}$$

联立（8）式、（9）式、（10）式、（11）式解得：

$$A_1^{+(1)}=A_1^{-(1)}=A_1^{+(2)}=A_1^{-(2)}=\frac{\alpha}{4} \qquad (12)$$

于是（6）式可表示为

$$\varphi_1=\frac{\alpha}{4}\left[\left(e^{i\sqrt{\frac{g}{l}}\,t}+e^{-i\sqrt{\frac{g}{l}}\,t}\right)+\left(e^{i\sqrt{\frac{g}{l}+\frac{2ch^2}{ml^2}}\,t}+e^{-i\sqrt{\frac{g}{l}+\frac{2ch^2}{ml^2}}\,t}\right)\right]$$

$$=\frac{\alpha}{2}\left(\cos\sqrt{\frac{g}{l}}\,t+\cos\sqrt{\frac{g}{l}+\frac{2ch^2}{ml^2}}\,t\right)$$

$$=\alpha\cos\left[\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{g}{l}}-\sqrt{\frac{g}{l}+\frac{2ch^2}{ml^2}}\right)t\right]\cos\left[\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{g}{l}}+\sqrt{\frac{g}{l}+\frac{2ch^2}{ml^2}}\right)t\right]$$

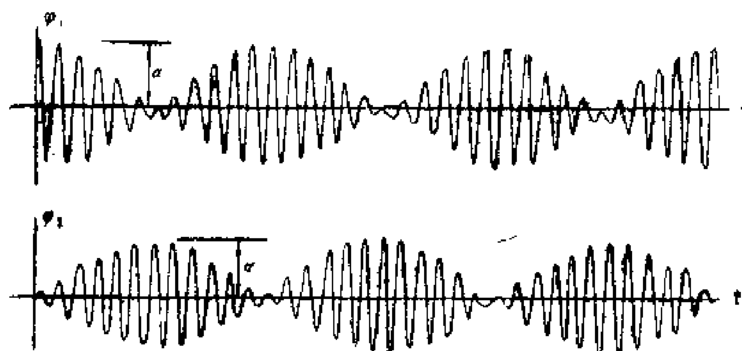
$$\varphi_2=\frac{\alpha}{4}\left[\left(e^{i\sqrt{\frac{g}{l}}\,t}+e^{-i\sqrt{\frac{g}{l}}\,t}\right)-\left(e^{i\sqrt{\frac{g}{l}+\frac{2ch^2}{ml^2}}\,t}+e^{-i\sqrt{\frac{g}{l}+\frac{2ch^2}{ml^2}}\,t}\right)\right]$$

$$=\frac{\alpha}{2}\left[\cos\sqrt{\frac{g}{l}}\,t-\cos\sqrt{\frac{g}{l}+\frac{2ch^2}{ml^2}}\,t\right]$$

$$=-\alpha\sin\left[\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{g}{l}}-\sqrt{\frac{g}{l}+\frac{2ch^2}{ml^2}}\right)t\right]\sin\left[\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{g}{l}}+\right.\right.$$

$$+\sqrt{\frac{g}{l}+\frac{2ch^2}{ml^2}}\ \Big)\ t\ \Big]$$

由此可见，耦合摆的每一个摆的摆动可以认为是具有$\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{l}}+\sqrt{\frac{g}{l}+\frac{2ch^2}{ml^2}}\right)$的圆频率和具有周期性变化的振幅（此振幅的圆频率为$\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{g}{l}+\frac{2ch^2}{ml^2}}-\sqrt{\frac{g}{l}}\right)$的振动.



耦合摆振动的一个特解

图2.32

例 8：两个质量分别为m_1和m_2的小球，同在一光滑轴（ox轴）上，用一刚性系数为C的弹簧相连结，并可沿这杆移动. 当弹簧不受力时，两小球的重心间的距离为l. 开始时，m_1小球的初速为u_0，m_2小球的初始速度为零. 求此系统的运动.

解：由于此系统具有二个自由度，故选m_1小球的重心离开其平衡位置的距离x_1与m_2小球的重心离开其平衡位置的距离x_2为相应的广义坐标，如图2.33所示。那么系统的动能为

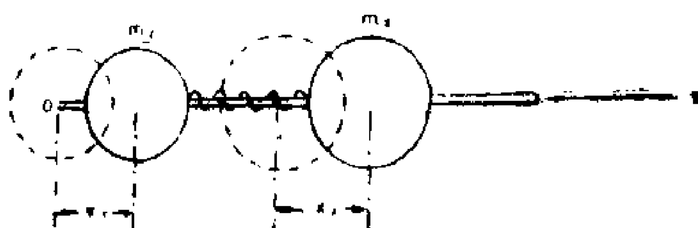


图2.33

$$T=\frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 \tag{1}$$

若选平衡位置为势能的参考点时，那么系统的势能为

$$V=\frac{1}{2}c(x_2-x_1)^2 \tag{2}$$

于是，系统的拉格朗日函数为

$$L=T-V=\frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2-\frac{1}{2}c(x_2-x_1)^2$$

由拉格朗日方程

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right)-\dfrac{\partial L}{\partial x_1}=0 \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right)-\dfrac{\partial L}{\partial x_2}=0 \end{cases}$$

得

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1-c(x_2-x_1)=0 \\ m_2\ddot{x}_2+c(x_2-x_1)=0 \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} \ddot{x}_1+\dfrac{C}{m_1}x_1-\dfrac{C}{m_1}x_2=0 \\ \ddot{x}_2+\dfrac{C}{m_2}x_2-\dfrac{C}{m_2}x_1=0 \end{cases} \tag{3}$$

此方程组为二阶线性齐次常系数常微分方程，其解要求具有振动形式，所以它的特解形式可设为

$$x_1=A_1e^{ipt}\ , \quad x_2=A_2e^{ipt} \tag{4}$$

把（4）式代入（3）式并消去e^{ipt}便得

$$\begin{cases} \left(-p^2+\dfrac{C}{m_1}\right)A_1-\dfrac{C}{m_1}A_2=0 \\ -\dfrac{C}{m_2}A_1+\left(-p^2+\dfrac{C}{m_2}\right)A_2=0 \end{cases} \tag{5}$$

要使A_1、A_2有非零解，必须满足其系数行列式等于零。即

$$\begin{vmatrix} -p^2+\dfrac{C}{m_1}\ , & -\dfrac{C}{m_1} \\ -\dfrac{C}{m_2}\ , & -p^2+\dfrac{C}{m_2} \end{vmatrix}=0$$

展开并经整理得

$$p^2\left[p^2-C\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)\right]=0$$

于是，上述方程给出p的四个可能值

$$p_1=0\ (\text{重根}), \qquad p_2=\pm\sqrt{C\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)}$$

把$p_1=0$代入方程组（5）得

$$\frac{A_1^{(1)}}{A_2^{(1)}}=\frac{A_1^{-(1)}}{A_2^{-(1)}}=\frac{\dfrac{C}{m_1}}{\dfrac{C}{m_1}}=1$$

把$p_2=\pm\sqrt{C\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)}$代入方程组（5）得

$$\frac{A_1^{(2)}}{A_2^{(2)}}=\frac{\bar{A}_1^{(2)}}{\bar{A}_2^{(2)}}=\frac{\dfrac{C}{m_1}}{-C\left(\dfrac{1}{m_1}+\dfrac{1}{m_2}\right)+\dfrac{C}{m_1}}=-\frac{m_2}{m_1}$$

考虑到 $p=0$ 为原微分方程组（3）的特征方程的两个重根，因此方程组(3)的通解为

$$x_1=(A_1^{(1)}+\bar{A}_1^{(1)}+C_1^{(1)}t)+A_1^{(2)}e^{ip_2t}+\bar{A}_1^{(2)}e^{-ip_2t}$$

$$=C_1^{(1)}(t+\alpha_1)+A_1^{(2)}e^{i\sqrt{C\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)}\,t}+$$

$$+\bar{A}_1^{(2)}e^{-i\sqrt{C\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)}\,t}$$

$$=C_1^{(1)}(t+\alpha_1)+C_1^{(2)}\sin\left(\sqrt{C\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)}\,t+\alpha_2\right)$$

$$x_2=(A_2^{(1)}+\bar{A}_2^{(1)}+C_2^{(1)}t)+A_2^{(2)}e^{ip_2t}+\bar{A}_2^{(2)}e^{-ip_2t}$$

$$=C_2^{(1)}(t+\alpha_1)+C_2^{(2)}\sin\left(\sqrt{C\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)}\,t+\alpha_2\right)$$

$$=C_1^{(1)}(t+\alpha_1)-\frac{m_1}{m_2}C_1^{(2)}\sin\left(\sqrt{C\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)}\,t+\alpha_2\right)$$

由初始条件 $t=0$ 时，$x_1=0$，$\dot{x}_1=u_0$，$x_2=0$，$\dot{x}_2=0$ 得

$$C_1^{(1)}\alpha_1+C_1^{(2)}\sin\alpha_2=0 \qquad (6)$$

$$C_1^{(1)}\alpha_1-\frac{m_1}{m_2}C_1^{(2)}\sin\alpha_2=0 \qquad (7)$$

$$C_1^{(1)}+C_1^{(2)}\sqrt{C\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)}\cos\alpha_2=u_0 \qquad (8)$$

$$C_1^{(1)}-\frac{m_1}{m_2}C_1^{(2)}\sqrt{C\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)}\cos\alpha_2=0 \qquad (9)$$

联立（6）式、（7）式、（8）式与（9）式解得：

$$\alpha_1=0 \qquad (10)$$

$$\alpha_2=0$$

$$C_1^{(1)}=\frac{m_1}{m_1+m_2}u_0 \qquad (12)$$

$$C_1^{(2)}=\frac{m_2}{(m_1+m_2)}\cdot\frac{u_0}{\sqrt{C\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)}} \qquad (13)$$

于是

$$x_1=\frac{1}{m_1+m_2}\left[m_1u_0t+\frac{m_2u_0}{\sqrt{C\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)}}\sin\left(\sqrt{C\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)}\;t\right)\right]$$

$$x_2=\frac{1}{m_1+m_2}\left[m_1u_0t-\frac{m_1u_0}{\sqrt{C\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)}}\sin\left(\sqrt{C\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)}\;t\right)\right]$$

例 9：半径为 a 的园形管可以无摩擦地绕铅垂直径 AB 旋转；管对直径的转动惯量等于 J。管中有一质量 m 的质点可以不受摩擦而移动。当管以等角速度 ω_0 旋转时，质点位于相对平衡位置 M_0，而 $\angle AOM_0 = \alpha$。若给质点以一沿管之切向的不大的相对初速，试求质点绕 M_0 位置所作的微振动周期。

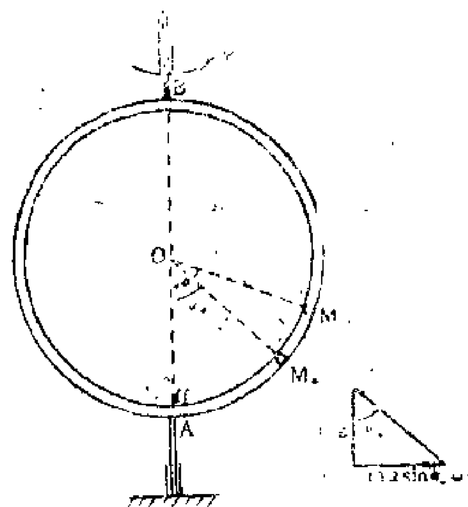


图2.34

解：此题我们介绍一种打破常规的解法，即把系统的动能与势能的表达式先代入拉格朗日方程，而后把广义坐标的函数项在平衡位置附近展开为泰勒级数并保留到一阶微量，使运动微分方程线性化，进而解此线性微分方程。

把园形管与质点视为一个系统，此系统具有二个自由度，故选 α、φ 为相应的广义坐标，如图2.34所示。那么系统的动能为

$$T = \frac{1}{2}m(a^2\dot{\alpha}^2 + a^2\sin^2\alpha\dot{\varphi}^2) + \frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2$$

$$= \frac{1}{2}ma^2\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}(J + ma^2\sin^2\alpha)\dot{\varphi}^2 \qquad (1)$$

若选 O 为系统势能的参考点时，那么系统的势能为

$$V = -mga\cos\alpha \qquad (2)$$

由平衡条件得

$$\frac{ma\sin\alpha_0\omega_0^2}{mg} = \text{tg}\,\alpha_0$$

所以

$$g = a\cos\alpha_0\omega_0^2 \qquad (3)$$

把（3）式代入（2）式得

$$V = -ma^2\cos\alpha_0\omega_0^2\cos\alpha \qquad (4)$$

于是，系统的拉格朗日函数为

$$L = T - V = \frac{1}{2}ma^2\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}(J + ma^2\sin^2\alpha)\dot{\varphi}^2 + ma^2\cos\alpha_0\omega_0^2\cos\alpha$$

由拉格朗日方程

$$q_1 = \alpha: \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\alpha}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\alpha} = 0$$

得

$$ma^2\ddot{\alpha} - ma^2\sin\alpha\cos\alpha\dot{\varphi}^2 + ma^2\cos\alpha_0\omega_0^2\sin\alpha = 0$$

即

$$\ddot{\alpha} - \sin\alpha\cdot\cos\alpha\dot{\varphi}^2 + \cos\alpha_0\omega_0^2\sin\alpha = 0 \qquad (5)$$

由拉格朗日方程

$$q_2=\varphi: \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \varphi}=0$$

得 $(J+ma^2\sin^2\alpha)\dot{\varphi}=$常数 （角动量守恒）

由题给条件得

$$(J+ma^2\sin^2\alpha)\dot{\varphi}=(J+ma^2\sin^2\alpha_0)\omega_0$$

即
$$\dot{\varphi}=\frac{J+ma^2\sin^2\alpha_0}{J+ma^2\sin^2\alpha}\omega_0 \qquad (6)$$

把（6）式代入（5）式得

$$\ddot{\alpha}-(J+ma^2\sin^2\alpha_0)^2\omega_0^2\left[\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{(J+ma^2\sin^2\alpha)^2}\right]+\omega_0^2\cos\alpha_0\sin\alpha=0 \qquad (7)$$

现令$f_1(\alpha)=\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{(J+ma^2\sin\alpha^2)^2}$，在$\alpha=\alpha_0$附近展开为泰勒级数并保留到一阶微量。于是

$$\begin{aligned}f_1(\alpha)&=f_1(\alpha_0)+\left(\frac{df_1}{d\alpha}\right)_{\alpha_0}(\alpha-\alpha_0)\\&\doteq\frac{\sin\alpha_0\cos\alpha_0}{(J+ma^2\sin^2\alpha_0)^2}+\\&\quad+\frac{J(\cos^2\alpha_0-\sin^2\alpha_0)-ma^2\sin^4\alpha_0-3ma^2\sin^2\alpha_0\cos^2\alpha_0}{(J+ma^2\sin^2\alpha_0)^3}(\alpha-\alpha_0)\end{aligned} \qquad (8)$$

又令$f_2(\alpha)=\sin\alpha$，在$\alpha=\alpha_0$附近展开为泰勒级数并保留到一阶微量，于是

$$f_2(\alpha)=f_2(\alpha_0)+\left(\frac{df_2}{d\alpha}\right)_{\alpha_0}(\alpha-\alpha_0)=\sin\alpha_0+\cos\alpha_0(\alpha-\alpha_0) \qquad (9)$$

把（8）式与（9）式同时代入（7）式得

$$\ddot{\alpha}-\frac{\omega_0^2[J(\cos^2\alpha_0-\sin^2\alpha_0)-ma^2\sin^4\alpha_0-3ma^2\sin^2\alpha_0\cos^2\alpha_0]}{J+ma^2\sin^2\alpha_0}(\alpha-\alpha_0)+$$
$$+\omega_0^2\cos^2\alpha_0(\alpha-\alpha_0)=0$$

若令$\beta=\alpha-\alpha_0$故上述微分方程变为

$$\ddot{\beta}+\omega_0^2\left[\frac{J(\sin^2\alpha_0-\cos^2\alpha_0)+ma^2\sin^4\alpha_0+3ma^2\sin^2\alpha_0\cos^2\alpha_0}{J+ma^2\sin^2\alpha_0}+\cos^2\alpha_0\right]\beta=0$$

即
$$\ddot{\beta}+\omega_0^2\left[\frac{J\sin^2\alpha_0+ma^2\sin^2\alpha_0(\sin^2\alpha_0+\cos^2\alpha_0)+3ma^2\sin^2\alpha_0\cos^2\alpha_0}{J+ma^2\sin^2\alpha_0}\right]\beta=0$$

或
$$\ddot{\beta}+\frac{\omega_0^2\sin^2\alpha_0[J+ma^2(1+3\cos^2\alpha_0)]}{J+ma^2\sin^2\alpha_0}\beta=0 \qquad (10)$$

因为

$$p^2=\frac{\omega_0^2\sin^2\alpha_0[J+ma^2(1+3\cos^2\alpha_0)]}{J+ma^2\sin^2\alpha_0}>0$$

故方程式（10）为谐振方程。于是，其振动周期为

$$\tau=\frac{2\pi}{p}=2\pi\sqrt{\frac{J+ma^2\sin^2\alpha_0}{\omega_0^2\sin^2\alpha_0[J+ma^2(1+3\cos^2\alpha_0)]}}$$

即
$$\tau=\frac{2\pi}{\omega_0\sin\alpha_0}\sqrt{\frac{J+ma^2\sin^2\alpha_0}{J+ma^2(1+3\cos^2\alpha_0)}}$$

例 10. 三个大小相同质量各为m的小球，放在光滑的水平桌面上，用两个相同的弹簧相连，其弹簧刚性系数各为k，求此系统的运动。

解：此系统具有三个自由度，故选各个小球离开其平衡位置的距离x_1，x_2，x_3为相应的广义坐标，如图2.35所示。于是，系统的动能为

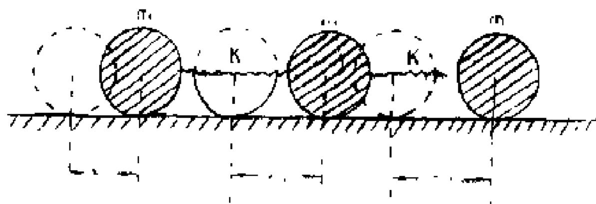


图2.35

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2+\dot{x}_3^2) \qquad (1)$$

若选平衡位置为势能的参考点时，那么系统的势能为

$$V=\frac{1}{2}k[(x_2-x_1)^2+(x_3-x_2)^2] \qquad (2)$$

故系统的拉格朗日函数为

$$L=T-V=\frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2+\dot{x}_3^2)-\frac{1}{2}k[(x_2-x_1)^2+(x_3-x_2)^2]$$

由拉格朗日方程

$$\begin{cases}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right)-\frac{\partial L}{\partial x_1}=0\\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right)-\frac{\partial L}{\partial x_2}=0\\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_3}\right)-\frac{\partial L}{\partial x_3}=0\end{cases}$$

得

$$\begin{cases}m\ddot{x}_1+kx_1-kx_2=0\\ m\ddot{x}_2-kx_1+2kx_2-kx_3=0\\ m\ddot{x}_3-kx_2+kx_3=0\end{cases} \qquad (3)$$

上述方程组为二阶线性齐次常系数常微分方程。其解要求具有振动的形式，所以它的特解的形式可设为

$$x_1=A_1e^{ipt},\quad x_2=A_2e^{ipt},\quad x_3=A_3e^{ipt} \qquad (4)$$

把（4）式代入（3）式并消去e^{ipt}使得

$$\begin{cases}\left(-p^2+\frac{k}{m}\right)A_1-\frac{k}{m}A_2=0\\ -\frac{k}{m}A_1+\left(-p^2+\frac{2k}{m}\right)A_2-\frac{k}{m}A_3=0\\ -\frac{k}{m}A_2+\left(-p^2+\frac{k}{m}\right)A_3=0\end{cases} \qquad (5)$$

要使 A_1、A_2、A_3 有非零解，必须满足其系数行列式等于零。即

$$\begin{vmatrix} \left(-p^2+\frac{k}{m}\right), & -\frac{k}{m}, & 0 \\ -\frac{k}{m}, & \left(-p^2+\frac{2k}{m}\right), & -\frac{k}{m} \\ 0, & -\frac{k}{m}, & \left(-p^2+\frac{k}{m}\right) \end{vmatrix}=0$$

展开并经整理得

$$-p^2\left(\frac{3k}{m}-p^2\right)\left(\frac{k}{m}-p^2\right)=0$$

于是，上述方程给出了 P 的四个可能值：

$$p_1=0\text{（重根）},\quad p_2=\pm\sqrt{\frac{k}{m}},\quad p_3=\pm\sqrt{\frac{3k}{m}}$$

把 $p_1=0$ 代入方程组（5）得

$$\frac{A_2^{(1)}}{A_1^{(1)}}=\frac{A_2^{(1)}}{A_1^{(1)}}=\frac{\frac{k}{m}}{\frac{k}{m}}=1$$

$$\frac{A_3^{(1)}}{A_2^{(1)}}=\frac{A_3^{(1)}}{A_2^{(1)}}=\frac{\frac{k}{m}}{\frac{k}{m}}=1$$

把 $p_2=\pm\sqrt{\frac{k}{m}}$ 代入方程组（5）得

$$\frac{A_2^{(2)}}{A_1^{(2)}}=\frac{A_2^{(2)}}{A_1^{(2)}}=0\quad\text{即}A_2^{(2)}=A_2^{(2)}=0$$

$$\frac{A_3^{(2)}}{A_1^{(2)}}=\frac{A_3^{(2)}}{A_1^{(2)}}=\frac{-\frac{k}{m}}{\frac{k}{m}}=-1,$$

把 $p_3=\pm\sqrt{\frac{3k}{m}}$ 代入方程组（5）得

$$\frac{A_2^{(3)}}{A_1^{(3)}}=\frac{A_2^{(3)}}{A_1^{(3)}}=-\frac{2\cdot\frac{k}{m}}{\frac{k}{m}}=-2\quad=\frac{-1}{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{A_3^{(3)}}{A_2^{(3)}}=\frac{A_3^{(3)}}{A_2^{(3)}}=\frac{\frac{k}{m}}{-\frac{2k}{m}}=\frac{1}{-2}=\frac{\frac{1}{2}}{-1}$$

故得其振型为

$$\begin{pmatrix} A_1^{(1)} \\ A_2^{(1)} \\ A_3^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{A}_1^{(1)} \\ \bar{A}_2^{(1)} \\ \bar{A}_3^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A_1^{(2)} \\ A_2^{(2)} \\ A_3^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{A}_1^{(2)} \\ \bar{A}_2^{(2)} \\ \bar{A}_3^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A_1^{(3)} \\ A_2^{(3)} \\ A_3^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{A}_1^{(3)} \\ \bar{A}_2^{(3)} \\ \bar{A}_3^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

考虑到 $p=0$ 为原微分方程组（3）的特征方程的两个重根，因此方程组（3）的通解为

$$\begin{aligned}
x_1 &= A_1^{(1)}e^{ip_1t}+\bar{A}_1^{(1)}e^{-ip_1t}+A_1^{(2)}e^{ip_2t}+\bar{A}_1^{(2)}e^{-ip_2t}+A_1^{(3)}e^{ip_3t}+ \\
&\quad +\bar{A}_1^{(3)}e^{-ip_3t} \\
&= (A_1^{(1)}+\bar{A}_1^{(1)}+C_1^{(1)}t)+A_1^{(2)}e^{i\sqrt{\frac{k}{m}}t}+\bar{A}_1^{(2)}e^{-i\sqrt{\frac{k}{m}}t}+ \\
&\quad +A_1^{(3)}e^{i\sqrt{\frac{3k}{m}}t}+\bar{A}_1^{(3)}e^{-i\sqrt{\frac{3k}{m}}t} \\
&= C_1^{(1)}(t+a_1)+C_1^{(2)}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t+a_2\right)+ \\
&\quad +\frac{1}{2}C_1^{(3)}\sin\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}\,t+a_3\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_2 &= A_2^{(1)}e^{ip_1t}+\bar{A}_2^{(1)}e^{-ip_1t}+A_2^{(2)}e^{ip_2t}+\bar{A}_2^{(2)}e^{-ip_2t}+ \\
&\quad +A_2^{(3)}e^{ip_3t}+\bar{A}_2^{(3)}e^{-ip_3t} \\
&= (A_2^{(1)}+\bar{A}_2^{(1)}+C_2^{(1)}t)+A_2^{(2)}e^{i\sqrt{\frac{k}{m}}t}+\bar{A}_2^{(2)}e^{-i\sqrt{\frac{k}{m}}t}+ \\
&\quad +A_2^{(3)}e^{i\sqrt{\frac{3k}{m}}t}+\bar{A}_2^{(3)}e^{-i\sqrt{\frac{3k}{m}}t} \\
&= C_2^{(1)}(t+a_1)+C_2^{(3)}\sin\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}\,t+a_3\right) \\
&= C_1^{(1)}(t+a_1)-C_1^{(3)}\sin\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}\,t+a_3\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_3 &= A_3^{(1)}e^{ip_1t}+\bar{A}_3^{(1)}e^{-ip_1t}+A_3^{(2)}e^{ip_2t}+\bar{A}_3^{(2)}e^{-ip_2t}+ \\
&\quad +A_3^{(3)}e^{ip_3t}+\bar{A}_3^{(3)}e^{-ip_3t} \\
&= (A_3^{(1)}+\bar{A}_3^{(1)}+C_3^{(1)}t)+A_3^{(2)}e^{i\sqrt{\frac{k}{m}}t}+\bar{A}_3^{(2)}e^{-i\sqrt{\frac{k}{m}}t}+
\end{aligned}$$

$$+A_3^{(3)}e^{i\sqrt{\frac{3k}{m}}t}+A_3^{(3)}e^{-i\sqrt{\frac{3k}{m}}t}$$

$$=C_3^{(1)}(t+a_1)+C_3^{(2)}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t+a_2\right)+C_3^{(3)}\sin\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t+a_3\right)$$

$$=C_1^{(1)}(t+a_1)-C_1^{(2)}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t+a_2\right)+\frac{1}{2}C_1^{(3)}\sin\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t+a_3\right)$$

习　题

1、试建立以下物体的拉格朗日函数：

1°、物理摆.

2°、按牛顿定律互相吸引的两个自由质点$M_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$及$M_2(x_2,\ y_2,\ z_2)$。

（答：1°、$L=\frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2+Mga\cos\varphi$，其中$\varphi$为摆偏离平衡位置的角度，$J$为摆对转动轴的转动惯量，$M$为摆的质量，而$a$为摆之重心到转动轴的距离.

2°、$L=\frac{1}{2}\left[m_1(\dot{x}_1^2+\dot{y}_1^2+\dot{z}_1^2)+m_2(\dot{x}_2^2+\dot{y}_2^2+\dot{z}_2^2)\right]+$

$$+\frac{Km_1m_2}{\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}}\Bigg)$$

2、应用拉格朗日方程写出自由质点在柱坐标中的运动方程式.

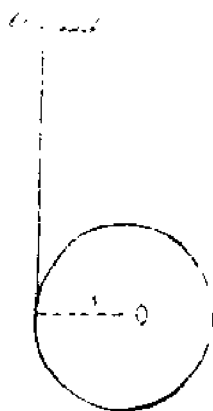
（答：$m(\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2)=Fr$；　$m(r\ddot{\varphi}+2\dot{r}\dot{\varphi})=F_\varphi$；$m\ddot{z}=Fz$，其中$Fr$为作用力在径向$r$上的投影，$F_\varphi$为作用力在垂直于$r$的方向上的投影，而$Fz$为作用力在$z$轴上的投影。）

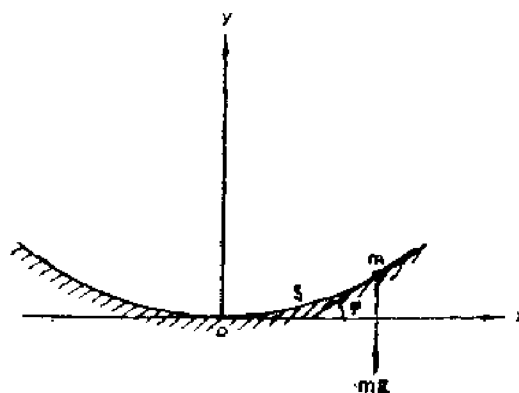
3、一端固结于天花板上的绳缠在一个半径为r、重P的滑轮上．求滑轮中心向下运动的加速度a，滑轮的角加速度ε和绳的张力T.

$\left(\text{答：}a=\frac{2}{3}g,\quad \varepsilon=\frac{2g}{3r},\quad T=\frac{1}{3}P\right)$.

4、一质点的质量为m，受重力作用，在旋轮线的导轨上运动．旋轮线的方程式已知为$s=4a\sin\varphi$其中s是自o点起算的弧长，φ是旋轮线的切线与水平轴的交角．求质点的运动。

（答：$s=A\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{a}}t+\varphi_0\right)$，其中$A$和$\varphi_0$是积分常数。）





题3图　　　　题4图

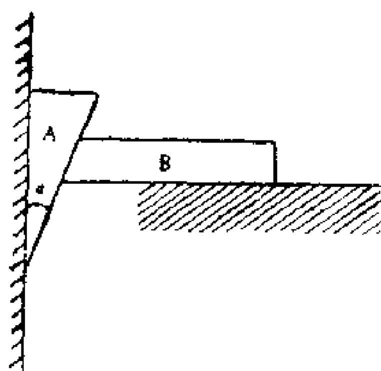
5、尖劈A，重P，其角为α。此尖劈的一面靠在光滑墙上，另一面和重为Q的光滑棱柱B接触。棱柱B可沿一固定水平面无摩擦而滑动。求尖劈及棱柱的加速度a及a_1，又求尖劈对棱柱所施加的压力N。

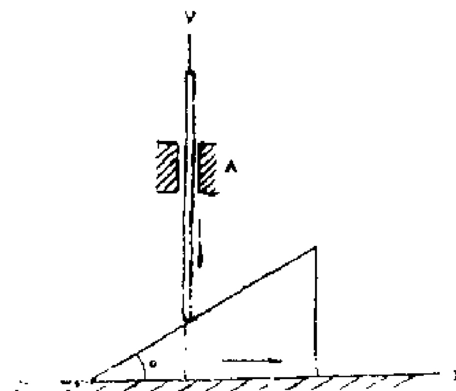
$$\left(答：\ a=\frac{Pg}{P+Q\,\mathrm{tg}^2\alpha},\ a_1=\frac{P\mathrm{tg}\alpha\cdot g}{P+Q\,\mathrm{tg}^2\alpha},\ N=\frac{PQ\sin\alpha}{P\cos^2\alpha+Q\sin^2\alpha}\right)$$

6、质量为m的直杆可以自由地在固定铅垂套管中移动。杆的下端搁在质量为M的、绝对光滑的尖劈上。而尖劈放于绝对光滑的水平面上。由于杆子的压力，尖劈向水平方向移动，因而杆子也往下降，试求两物体的加速度。

（答：杆子的加速度 $a=\dfrac{mg}{m+M\mathrm{ctg}^2\alpha}$

尖劈的加速度$a_1=a\mathrm{ctg}\alpha$）。





题5图　　　　题6图

7、一均质圆盘，半径为R、质量为M，可以绕通过盘心O的水平轴转动，在圆盘边缘一点A上悬挂一长为l的轻杆AB，杆的B端固结一质量为m的质点。考虑重力的影响，写出该系统的运动微分方程。

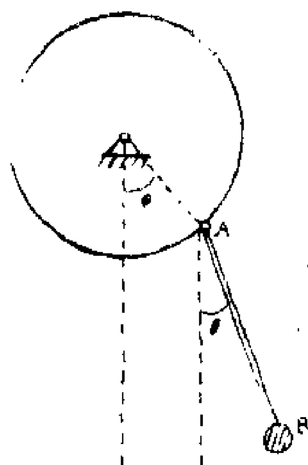
$$（答：\left(m+\frac{M}{2}\right)R^2\ddot{\varphi}+mRl\ddot{\theta}\cos(\varphi-\theta)+mRl\dot{\theta}^2\sin(\varphi-\theta)+$$

$$+mgR\sin\varphi=0）$$

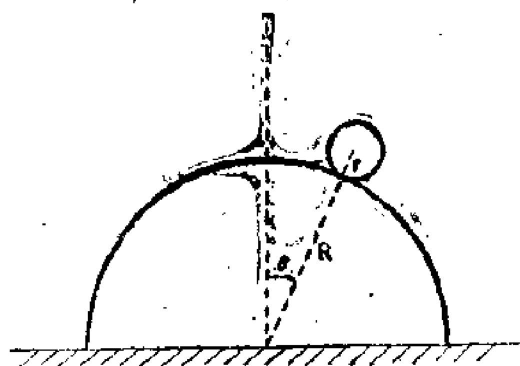
$$l\ddot{\theta}+R\ddot{\varphi}\cos(\varphi-\theta)-R\dot{\varphi}^2\sin(\varphi-\theta)+g\sin\theta=0$$

8、一质量为m、半径为r的小球，在重力作用下，沿着一个质量为M、半径为R的半球的凸面无滑动的滚动。此半球的底面可以在水平面上无摩擦地滑动。设小球的初始位置与半球心的联线和铅垂线成α角，并且起始时，此系统是静止的。求小球绕半球心转动的角速度）

$$（答\quad \dot{\theta}=\sqrt{(R+r)\dfrac{2g(\cos\alpha-\cos\theta)}{\left[\dfrac{7}{5}-\dfrac{m\cos^2\theta}{M+m}\right]}}$$



题7图



题8图

9、重P_1的均质园柱放在一不光滑的水平面上，柱的外周缠绕一绳，其自由端水平伸出（如图所示）通过一固定滑轮（滑轮无重量及摩擦），并在绳端悬一重P_2的重物。设园柱只滚不滑，求园柱重心加速度a_1，重物加速度a_2及张力T。

$$（答：a_1=\frac{4p_2g}{3p_1+8p_2}\ ；\ a_2=2a_1\ ；\ T=\frac{3p_1p_2}{3p_1+8p_2}\ ）$$

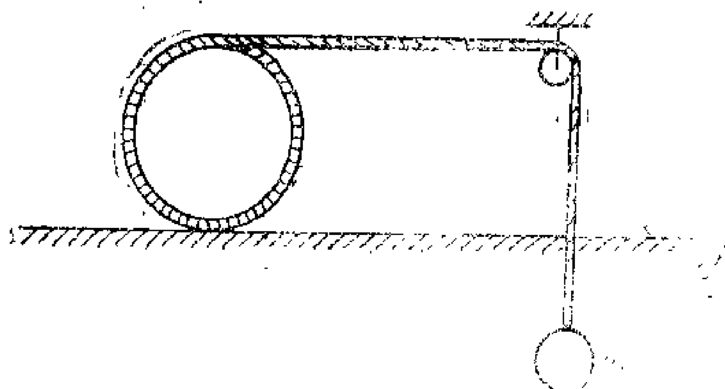
10、在一质量可忽略的滑轮上绕一绳；绳之一端悬一质量m_1的重物M_1，而另一端系一无重小滑轮，在小滑轮上另绕一绳，其两端悬质量为m_2及m_3的重物M_2与M_3。如在开始时

$$y_1=y_{10},\ y_2=y_{20},\ \dot{y}_1=\dot{y}_{10},\ \dot{y}_2=\dot{y}_{20}$$

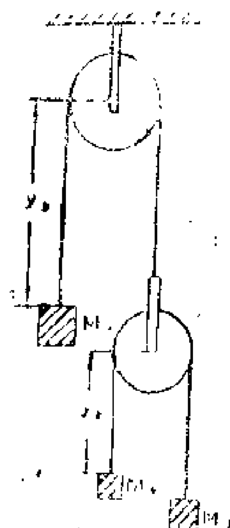
求此系统的运动。

$$（答：y_1=y_{10}+\dot{y}_{10}t+\frac{m_1(m_2+m_3)-4m_2m_3}{m_1(m_2+m_3)+4m_2m_3}\cdot\frac{gt^2}{2}$$

$$y_2=y_{20}+\dot{y}_{20}t+\frac{2m_1(m_2-m_3)}{m_1(m_2+m_3)+4m_2m_3}\cdot\frac{gt^2}{2}\ ）$$



题9图



题10图

11、绳之一端固定于A点，此绳绕过一动滑轮O及一定滑轮O_1，其另一端系一重Q之物；动滑轮下悬一重P之物，同时$Q > \frac{1}{2}P$。设起始系统为静止，且$h=0$。不计滑轮的重量，求重物Q的速度与h的关系，又求其加速度a。

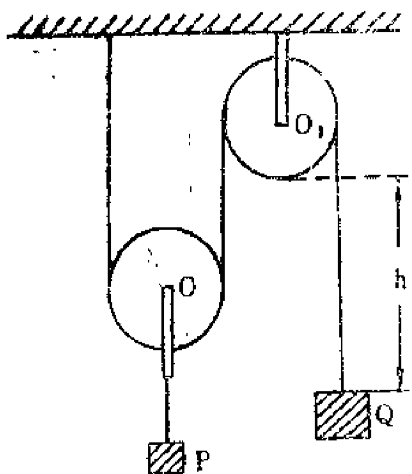
（答：$v=2\sqrt{\dfrac{(2Q-P)gh}{4Q+P}}$，$a=\dfrac{2(2Q-P)g}{4Q+P}$）

12、二皮带轮M_1与M_2，质量为m_1与m_2，半径为r_1与r_2，其上缠有绳子，此绳绕过一质量为m_3，半径为r_3的滑轮M_3；滑轮M_3可以无摩擦地绕定轴O转动。假定，绳子与滑轮之间没有滑动而皮带轮中心皆沿铅垂直线运动，求滑轮的角加速度$\ddot{\varphi}_3$（φ_3为滑轮M_3的转角）及两个皮带轮中心的加速度。

（答：$\ddot{\varphi}_3=\dfrac{(m_1-m_2)g}{\left(m_1+m_2+\dfrac{3}{2}m_3\right)r_3}$

$$a_1=\frac{3(m_1+m_3)+m_2}{3\left(m_1+m_2+\dfrac{3}{2}m_3\right)}\cdot g$$

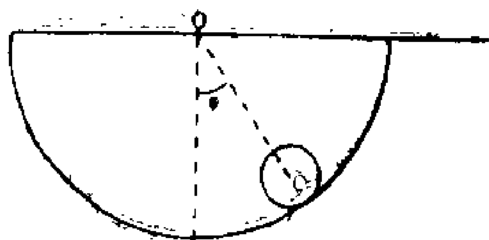
$$a_2=\frac{3(m_2+m_3)+m_1}{3\left(m_1+m_2+\dfrac{3}{2}m_3\right)}\cdot g$$



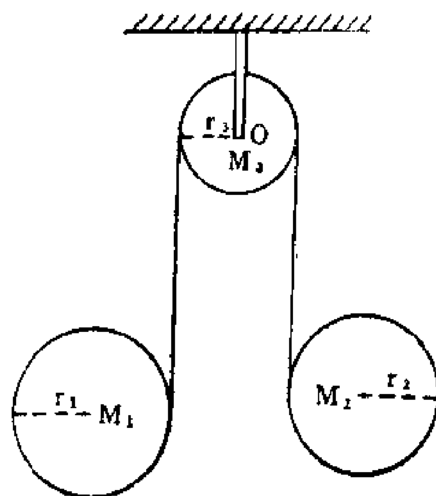
题11图

13、半径为r的均匀重球可以无滑地沿一具有水平轴的半径为R的固定圆柱之内表面而滚动。求与圆球绕平衡位置作微振动的周期相同的数学摆之摆长。

（答：$l=\dfrac{7}{5}(R-r)=1.4(R-r)$）



题13图



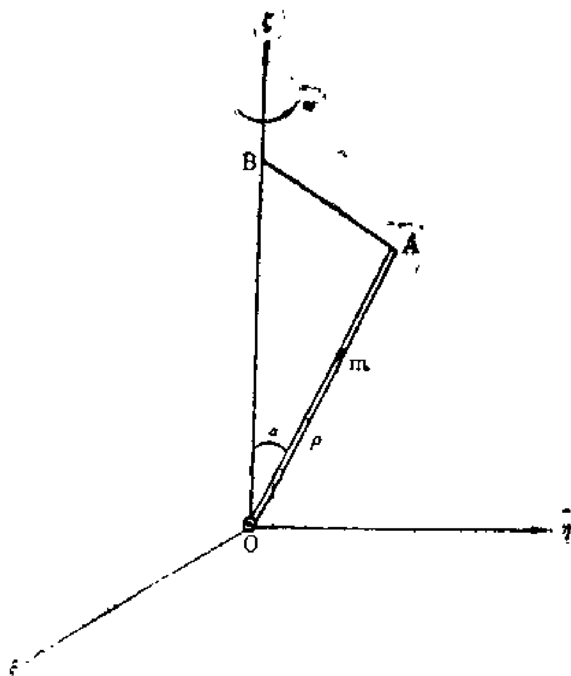
题12图

14．一光滑管OA，其O端固定于球铰链O．A端以绳子固结于铅垂轴$O\zeta$于B点（倾角α不变），并以匀角速ω绕铅垂轴$O\zeta$转动．质点m沿管移动，离O点距离为ρ，运动开始时．m在ρ_0处．且初速为零．求质点对管OA的相对运动．

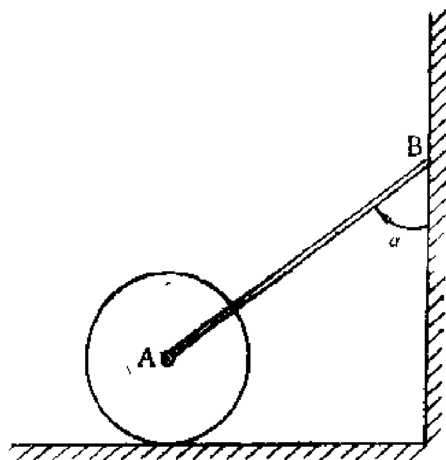
$$\left(\text{答：} \rho=\left(\rho_0-\frac{g\cos\alpha}{\omega^2\sin^2\alpha}\right)ch(\omega\sin\alpha t)+\frac{g\cos\alpha}{\omega^2\sin^2\alpha}\right)$$

15、图示均质园柱A的半径为r、质量为M，均质杆AB的长度为l，质量为m，铰A和墙B处都是光滑接触，地面相当粗糙，以至园柱只滚不滑．初始时系统静止，且$\alpha=45°$，然后释放，求初始时刻A点和B点的运动加速度、杆的角加速度．

$$\left(\text{答：} a_A=a_B=\frac{3mg}{9M+4m},\quad \varepsilon=\frac{\sqrt{2}a_A}{l}\right)$$



题 14 图



题 15 图

16. 试应用拉格朗日方程导出刚体绕定点转动的欧勒方程式的第三式：

$C\dot{\omega}_z+(B-A)\omega_x\omega_y=L_z$，以物体的自转角 φ（绕 z 轴）为参变数。

（提示：需要利用物体动能式子 $T=\frac{1}{2}(A\omega_x^2+B\omega_y^2+C\omega_z^2)$ 和以欧勒角及其对时间的微商表示的运动方程式）。

17. 在一光滑的水平面上有一小孔 O，一理想绳子长为 l，其一端系一质量为 m 的质点 P，搁在水平面上，另一端穿过 O 点自由悬挂着另一等质量的质点 Q。开始时，P 质点以 V_0 垂直于 $OP=a$ 发射，求 P 质点任一瞬时的速度。

（答：$V=\sqrt{\frac{1}{2}\left(V_0^2+\frac{a^2V_0^2}{r^2}\right)+g(a-r)}$ ）

18. 两天体（如地球与月球）质量分别为 m_1 和 m_2，彼此相对运动依据万有引力定律，相互间的吸引力与两者距离的平方成反比。若 $\mathbf{r}_1$ 和 $\mathbf{r}_2$ 分别表示 m_1 与 m_2 天体在某一固定坐标轴的位置矢径，及 $\mathbf{r}=\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2$，那么，试证明它们的运动微分方程分别可表示为

$$\ddot{\mathbf{r}}_1=-\frac{Gm_2(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)}{r^3},\quad \ddot{\mathbf{r}}_2=-\frac{Gm_1(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)}{r^3}$$

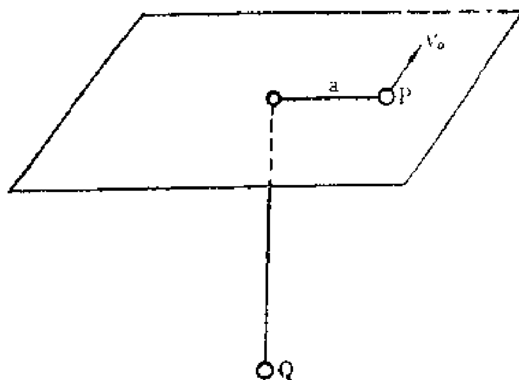
19. 质量为 m、长为 $2a$ 的均质杆 OA，其 O 端与固定点铰接，杆与向下竖直线 OZ 的夹角为 θ。平面 AOZ 与固定竖直面的夹角为 φ。质量为 λm 的光滑小环套在杆 OA 上，小环与固定点 O 之间由弹簧相连，弹簧的自然长度为 a，弹簧的弹性系数为 $\frac{nmg}{a}$。试证系统的动能为

$$T=\frac{2}{3}ma^2(\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)+\frac{\lambda m}{2}(\dot{x}^2+x^2\dot{\theta}^2+x^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)$$

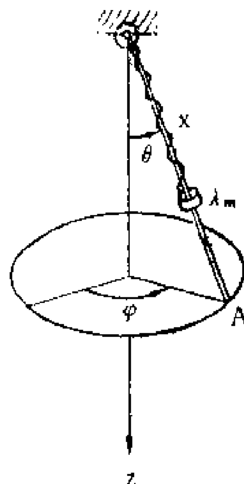
其中 λ，n 为常量，x 是小环与 O 点的距离。

再证明，如果 $\theta=\frac{\pi}{3}$，$x=\frac{4a}{3}$ 是可能的稳定运动，则

$$\dot{\varphi}^2=\frac{3g}{2a},\qquad n=6\lambda$$



题17图



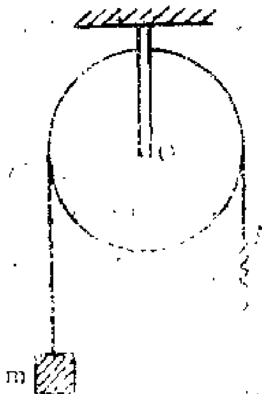
题19图

20．一滑轮可绕水平轴O转动，在此滑轮上绕过一条不可伸长的绳，绳之一端悬一重物，其质量为m；另一端A固结一铅垂的弹簧，弹簧的B端固定不动．弹簧张力与其伸长度成比例，比例常数等于C．已知滑轮的质量为M，并分布于轮缘上，而绳子与滑轮之间无滑动，试求重物的振动周期．

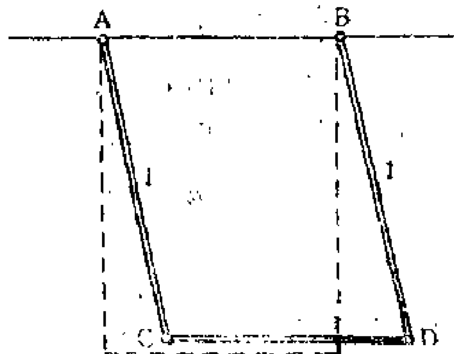
（答：$\tau=2\pi\sqrt{\dfrac{M+m}{C}}$ ）

21．两根长l、质量m_1的相同的杆AC和BD可在铅垂平面绕同在一水平线上的A和B两点旋转．此两杆用铰链与另一质量m_2、长为AB的水平杆联接起来．求该系统绕平衡位置而作的微振动的周期．

（答：$\tau=2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}\cdot\dfrac{(1+2/3\mu)}{(1+\mu)}}$，式中 $\mu=\dfrac{m_1}{m_2}$ ）



题20图



题21图

22．质量为m、长度为$2l$的均质杆AB被限制在竖直平面内运动，且其两端A和B只能沿着两条互相垂直的光滑细杆滑动，求杆在平衡位置附近作微振动的周期．

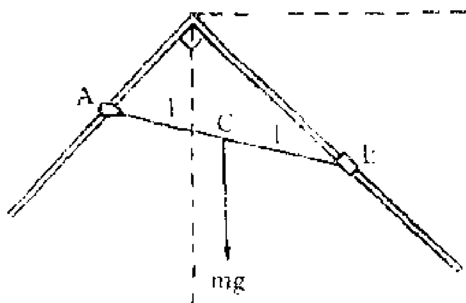
（答：$\tau=2\pi\sqrt{\dfrac{4l}{3g}}$ ）

23．质量为M、长为$2a$的均质直杆AB，放在一固定的水平粗糙的圆柱（半径为a）上．AB与圆柱的轴垂直，杆的两端各固定一质量为m的质点，平衡时AB的中点与圆柱面的最高点重合，且AB为水平位置．现给杆一竖直面内的小扰动，杆与柱面间无滑动，证明系统的动能为

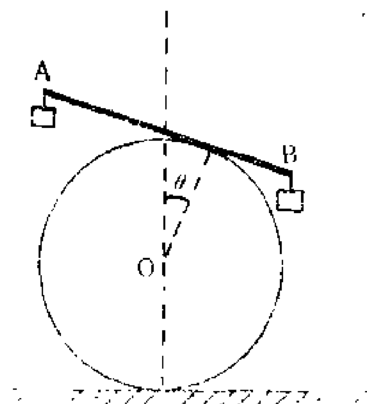
$$\frac{a^2\dot{\theta}^2}{6}[3\theta^2(M+2m)+(M+6m)];$$

杆在平衡位置附近微振动的周期为

$$2\pi\sqrt{\frac{a(M+6m)}{g(3M+6m)}}$$



题22图



题23图

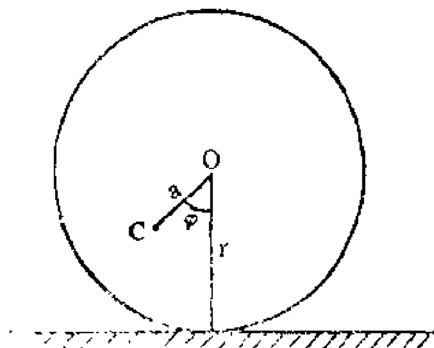
24. 半径为 r 的不均匀圆柱可以在水平面上无滑动而滚动。圆柱重心到几何轴的距离为 a。圆柱对经过其重心并平行于其母线的轴之回转半径等于 K。求圆柱在稳定平衡位置附近的微振动周期。

（答：$\tau=2\pi\sqrt{\dfrac{(r-a)^2+K^2}{ag}}$ ）

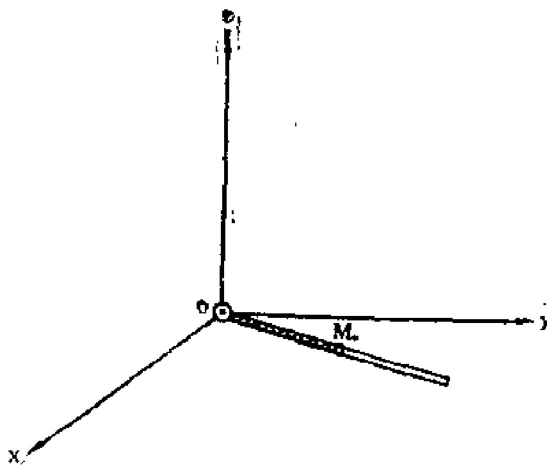
25. 有一直管 OA 可在水平面内绕通过 O 点的固定铅垂轴不受摩擦而旋转。在管中有一用弹簧与 O 点联起来的质量为 m 的小球。弹簧的弹性力与伸长成正比，且比例常数等于 c。当管以等角速度 ω_0 旋转时，小球位于相对平衡位置 M_0。管对转动轴的转动惯量等于 J。若小球所获的沿着管向的相对速度不大，试求小球绕 M_0 位置所作的微振动的周期。

（答：如 $K>\omega_0$ 则得 $\tau=2\pi\sqrt{\dfrac{J+mr_0^2}{J(K^2-\omega_0^2)+mr_0^2(K^2+3\omega_0^2)}}$

式中 $K^2=\dfrac{c}{m}$，$r_0=OM_0$ ）



题24图



题25图

26. 一摆由一滑块与一小球构成：滑块质量为 M，可在水平面上无摩擦地滑动，小球质量为 m，以杆子与滑块相连，杆可绕连结在滑块上的轴转动，滑块上连有一刚性系

数为 c 的弹簧，弹簧的另一端则固定不动，试求此系统的微振动的周期。

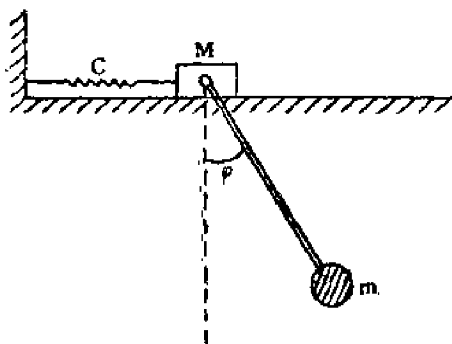
（答：所求的频率 P 是下面方程式的根：

$$P^4-\left[\frac{c}{M}+\frac{g}{l}\cdot\frac{(M+m)}{M}\right]P^2+\frac{cg}{Ml}=0$$

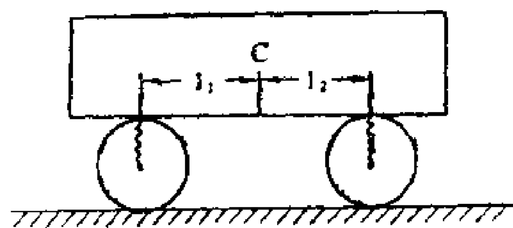
27. 试讨论列车车厢在它铅垂中心面中的振动。已知车厢装在弹簧的上部份的重量为 Q，它的重心到通过车厢轮轴的铅垂面的距离 $l_1=l_2=l$；又它对于与轮轴平行之中心轴的回转半径为 ρ；两轮轴弹簧的刚性系数相同：$c_1=c_2=c$。

（答：$x=A\sin(K_1t+\alpha)$，$\varphi=B\sin(K_2t+\beta)$）

x 是车厢部份重心的铅垂位移，φ 是车厢底板与水平面所成的交角；A，B，α 和 β 为积分常数。$K_1=\sqrt{\dfrac{2cg}{Q}}$，　$K_2=\sqrt{\dfrac{2cgl^2}{Q\rho^2}}$　）



题26图



题27图

28. 长为 l_1、质量为 m_1 的均匀细杆 OA 可以绕固定点 O 在铅垂面内转动，细杆的自由端 A 用球形铰链与另一杆 AB 相连接，此杆长 l_2，其质量为 m_2。求当此系统在垂直面内作微振动时，细杆与铅垂线所成角度 θ_1 及 θ_2 与时间 t 的关系。

（答：
$$\begin{cases}\theta_1=c_1\left(g-\dfrac{2}{3}l_2P_1^2\right)\sin(P_1t+\alpha_1)+c_2\left(g-\dfrac{2}{3}l_2P_2^2\right)\sin(P_2t+\alpha_2)\\ \theta_2=c_1l_1P_1^2\sin(P_1t+\alpha_1)+c_2l_1P_2^2\sin(P_2t+\alpha_2)\end{cases}$$

式中 P_1 及 P_2 为下式的正根

$$(4+3\mu)P^4-6g\left(\frac{1+3\mu}{l_2}+\frac{1+2\mu}{l_1}\right)P^2+9g^2\cdot\frac{1+2\mu}{l_1l_2}=0$$

上式中 $\mu=\dfrac{m_2}{m_1}$　）

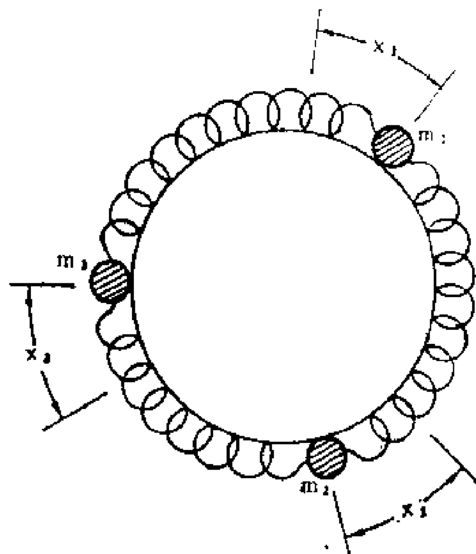
29. 质量均为 m 的三个相同质点，约束在一般的圆形轨道上运动。它们由三个完全相同的、刚性系数均为 K 的簧联结着，如图所示。设此系统处于平衡时，三弹簧均无相对伸长。求此系统在平衡位置附近的小振动。

答：
$$x_1=c^{(1)}(t+\alpha_1)+c^{(2)}\cos\left(\sqrt{\frac{3K}{m}}\,t+\alpha_2\right)+B^{(2)}\cos\left(\sqrt{\frac{3K}{m}}\,t+\alpha_3\right)$$

$$x_2=c^{(1)}(t+\alpha_1)-c^{(2)}\cos\left(\sqrt{\frac{3K}{m}}\,t+\alpha_2\right)+B^{(2)}\cos\left(\sqrt{\frac{3K}{m}}\,t+\alpha_3\right)$$

$$x_3=c^{(1)}(t+a_1)-2B^{(2)}\cos\left(\sqrt{\frac{3K}{m}}\;t+a_2\right)$$

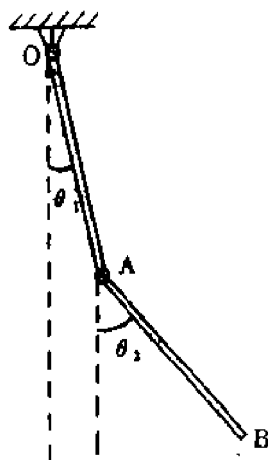
式中$c^{(1)}$、$c^{(2)}$、$B^{(2)}$，a_1、a_2、a_3为积分常数。



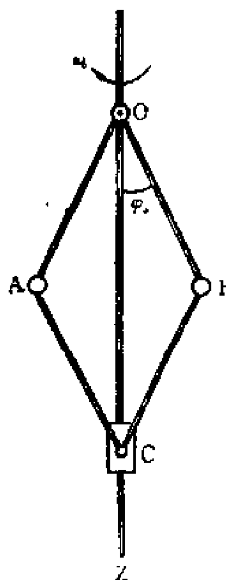
题29图

30．瓦特调速器由四根各长l的相同的杆OA、OB、AC、BC，两个各自具有质量m的球A、B及可沿铅垂直线OZ而滑动的质量为M的套管C所组成。杆的联结点O、A、B与C均为铰链。O点是固定的。当调速器以等角速度ω_0绕OZ轴旋转时，小球处于相对平衡位置，此时$\angle BOC=\varphi$。试求调速器在平衡位置附近的小振动周期。

（答：$\tau=\dfrac{2\pi}{\omega_0\sin\varphi_0}\sqrt{1+\dfrac{2M}{m}\sin^2\varphi_0}$）



题28图



题30图

第三章　哈密顿正则方程

§3-1　正则变量、哈密顿函数

在牛顿力学里，我们清楚地知道，单单靠坐标与速度（即$\mathbf{r}$与$\dot{\mathbf{r}}$）来描述物体的运动状态是远远不够的。如果我们采用了坐标与动量来描述物体的运动状态时，那么就可以使体现牛顿第二定律的物体运动方程

$$m\ddot{\mathbf{r}}=\mathbf{F}(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}},t)$$

变为

$$\dot{\mathbf{p}}=\mathbf{F}(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}},t)$$

也即，可以把二阶微分方程降为一阶微分方程。式中$\mathbf{p}$表示物体的动量，即

$$\mathbf{p}=m\dot{\mathbf{r}}$$

从这里我们可以得到启示：在分析力学中，我们是否也可以把本来以广义坐标q_i与广义速度$\dot{q}_i$所描述的物体的运动状态，改用以广义坐标q_i与广义动量p_i来描述物体的运动状态呢？从而使拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0\qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

由关于广义坐标q_i的二阶常微分方程组降为关于广义动量p_i的一阶常微分方程组呢？若能如愿，那么与拉格朗日函数相对应的函数（即哈密顿函数）是什么？与拉格朗日方程相对应的等价方程（即正则方程）又是什么？为此，我们只要应用数学上著名的勒让德变换就可以把拉格朗日变量（$q_i,\dot{q}_i$）变换为正则变量（q_i,p_i），而拉格朗日函数$L(q_i,\dot{q}_i,t)$变换为新的函数$H(q_i,p_i,t)$。它们之间的关系为

$$H(q_i,p_i,t)=\left[\sum_{i=1}^{n}p_i\dot{q}_i-L(q_i,\dot{q}_i,t)\right]_{\dot{q}_i\to p_i}\qquad (3.1)$$

上式中右端的下标$\dot{q}_i\to p_i$表示右端中的$\dot{q}_i$应由$p_i=\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$　$(i=1,2,\cdots,n)$中解出化为p_i的函数。因此，由（3.1）式所定义的关于正则变量（q_i,p_i）的函数$H(q_i,p_i,t)$称为哈密顿函数。至于与拉格朗日方程相对应的等价方程（正则方程），我们将在下一节里加以推导。

§3-2　哈密顿正则方程

将方程式（3.1）两端同时取等时变分得

$$\delta H=\left[\sum_{i=1}^{n}(p_i\delta\dot{q}_i+\dot{q}_i\delta p_i)-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta\dot{q}_i\right)+\frac{\partial L}{\partial t}\delta t\right]$$

考虑到等时变分 $\delta t=0$，故上述式子又变为

$$\delta H=\sum_{i=1}^{n}\left(p_i-\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta\dot{q}_i+\sum_{i=1}^{n}\left(\dot{q}_i\delta p_i-\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i\right) \tag{3.2}$$

利用广义动量的定义 $p_i=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ 以及拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0 \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

那么，（3.2）式又可改写为

$$\delta H=\sum_{i=1}^{n}(\dot{q}_i\delta p_i-\dot{p}_i\delta q_i) \tag{3.3}$$

另方面，由于哈密顿函数 H 是关于广义坐标 q_i，广义动量 p_i 以及时间 t 的函数，也即

$$H=H(q_i,p_i,t)$$

所以

$$\delta H=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\delta q_i+\frac{\partial H}{\partial p_i}\delta p_i\right)+\frac{\partial H}{\partial t}\delta t$$

考虑到等时变分 $\delta t=0$，故上述式子可变为

$$\delta H=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\delta q_i+\frac{\partial H}{\partial p_i}\delta p_i\right) \tag{3.4}$$

把（3.4）式代入（3.3）式即得

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\right)\delta q_i+\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\right)\delta p_i\right]=\sum_{i=1}^{n}(\dot{q}_i\delta p_i-\dot{p}_i\delta q_i)$$

合并同类项得

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{\partial H}{\partial q_i}+\dot{p}_i\right)\delta q_i+\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}-\dot{q}_i\right)\delta p_i\right]=0$$

由于 q_i，p_i 是彼此独立的正则变量，所以 δq_i，δp_i 是彼此独立且任意的，因此上述方程要恒等于零，必须 δq_i，δp_i 之前的系数同时等于零。即得

$$\begin{cases}\dot{p}_i=-\dfrac{\partial H}{\partial q_i}\\[2ex]\dot{q}_i=\dfrac{\partial H}{\partial p_i}\end{cases}\quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{3.5}$$

这是一组由 $2n$ 个一阶常微分方程组成的联立方程组。将这一组方程积分，加上初始条件，就可求出描述质点组运动的 n 个广义坐标 q_i 和 n 个广义动量 p_i 表为时间 t 的函数。也即完全可以确定质点组的运动。我们称（3.5）方程为**哈密顿正则方程**。

至于拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0 \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{3.6}$$

是一组由 n 个二阶常微分方程组成的方程组。将这一组方程积分并加上初始条件，就可以求出描述质点组运动的 n 个广义坐标q_l和广义速度$\dot{q}_l$表为时间 t 的函数。

因此，拉格朗日方程与哈密顿正则方程在分析力学中的地位与作用是完全等价的。由于哈密顿正则方程是采用正则变量（q_l, p_l），所以使方程在形式上显得简单而又对称。于是，哈密顿正则方程在理论上有较高的价值。特别在理论物理的发展过程中，曾经起着很大的作用。如在海森堡的量子力学中仍然保留着正则方程的数学形式。也正因为哈密顿正则方程所采用的是正则变量（q_l, p_l），所以在解决具体问题时，必须把广义速度$\dot{q}_l$变为广义坐标 q_l与广义动量 p_l 的函数。这对于解决较复杂的问题时，将是一件十分麻烦的事。在这一点上，若利用拉格朗日方程就可避免这一麻烦。因此，拉格朗日方程具有较高的实用价值。

正则方程有其明显的几何意义，即，在某一瞬间，质点组的运动状态可用$2n$维空间中的一个点来表示，这个空间的坐标是由n个的广义坐标 q_l 与 n 个广义动量 p_l所组成。我们称这个空间为相空间，其中的点叫做相点。当 $n=1$ 时，相空间就是一个二维的相平面（如图 3.1 所示）。当 $n\geqslant 2$ 时，相空间只能靠想像，而画不出来了。质点组的运动过程在相空间中对应着一条相轨迹。它每一瞬时均反映了质点组的位置与广义动量，而哈密顿正则方程(3.5)给出了相点的运动速度。

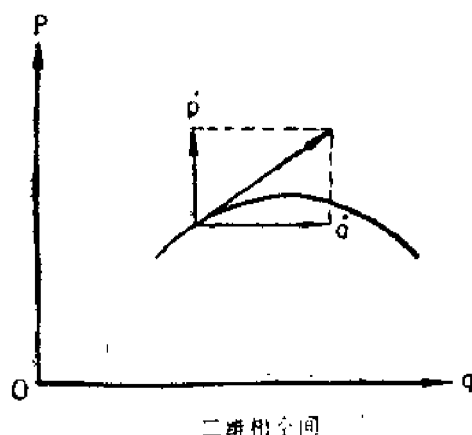


图 3.1

§3-3 哈密顿正则方程的能量积分

为了确定哈密顿正则方程的能量积分我们首先来探索一下哈密顿函数的物理意义。

把广义动量的定义 $p_l=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l}$代入哈密顿函数的定义（3.1）式得

$$H=\left[\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l}\dot{q}_l-L\right]_{\dot{q}_l\to p_l} \tag{3.7}$$

在 §2-3节里，我们曾经阐述过，拉格朗日函数 L 是分别关于广义速度 $\dot{q}_l$的齐二次、齐一次、以及齐零次的函数，也即

$$L=L_2+L_1+L_0$$

于是，（3.7）式又可表示为

$$H=\left[\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial L_2}{\partial \dot{q}_l}\dot{q}_l+\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial L_1}{\partial \dot{q}_l}\dot{q}_l+\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial L_0}{\partial \dot{q}_l}\dot{q}_l-(L_2+L_1+L_0)\right]_{\dot{q}_l\to p_l}$$

利用欧勒的齐次函数定理，上述方程式又可改写为

$$H=[2\cdot L_2+1\cdot L_1+0\cdot L_0-L_2-L_1-L_0]_{\dot{q}_l\to p_l}$$

$$=[L_2-L_0]_{\dot{q}_i\to p_i}$$

$$=[T_2-T_0+V]_{\dot{q}_i\to p_i} \qquad (3.8)$$

由此可见，在通常的保守组的情况下，哈密顿函数是用正则变量（q_i, p_i）表示的广义能量。若保守组所受的约束为稳定约束时，那么由 §2—3节里动能在广义坐标中表达式得知 $T_1=0$，$T_0=0$，$T_2=T$，因此

$$H=T+V=E \qquad (3.9)$$

此时，哈密顿函数H就是质点组的总能量。也即表示质点组的机械能。

下面我们将进一步确定哈密顿正则方程的能量积分。由于哈密顿函数H为广义坐标q_i，广义动量p_i以及时间t的函数，也即

$$H=H(q_i,p_i,t)$$

所以

$$\frac{dH}{dt}=\sum_{i=1}^{s}\left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\dot{q}_i+\frac{\partial H}{\partial p_i}\dot{p}_i\right)+\frac{\partial H}{\partial t} \qquad (3.10)$$

把正则方程（3.5）式代入（3.10）式即得

$$\frac{dH}{dt}=\sum_{i=1}^{s}(-\dot{p}_i\dot{q}_i+\dot{q}_i\dot{p}_i)+\frac{\partial H}{\partial t}$$

或者

$$\frac{dH}{dt}=\frac{\partial H}{\partial t} \qquad (3.11)$$

如果H不显含时间t，那么$\frac{\partial H}{\partial t}=0$，于是

$$\frac{dH}{dt}=0$$

即

$$H=\text{常量} \qquad (3.12)$$

把（3.12）式代入（3.8）式，便得在一般保守组的情况下

$$H=T_2-T_0+V=\text{常量} \qquad (3.13)$$

称（3.13）式为哈密顿正则方程的能量积分。此能量积分不是别的，就是在 §2—3节里我们曾经建立过的拉格朗日方程的能量积分。这并非偶然的巧合，而是必然的结果。因为，前面我们已经指出过，拉格朗日方程与哈密顿正则方程在分析力学中的地位与作用完全是等价的。所以它们在解决同一实际问题时，必然要得出相同的结果。

如果我们所研究的保守组是稳定的保守组时，那么（3.13）式将变为

$$H=T+V=\text{常量}$$

即为通常的机械能守恒。

下面我们举一些例子来说明哈密顿正则方程的应用。

例1 试分别以笛卡尔直角坐标、圆柱坐标以及球坐标写出自由质点在势场$V(q_i)$中运动的哈密顿函数。

解： i. 笛卡尔直角坐标：由于自由质点具有三个自由度，故选x、y、z为相应的广义坐标。于是，自由质点的拉格朗日函数为

$$L=T-V=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)-V(x,y,z) \tag{1}$$

式中m 为自由质点的质量。

由广义动量的定义得

$$p_x=\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=m\dot{x}$$

$$p_y=\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}=m\dot{y}$$

$$p_z=\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}=m\dot{z}$$

故有

$$\dot{x}=\frac{p_x}{m}$$

$$\dot{y}=\frac{p_y}{m}$$

$$\dot{z}=\frac{p_z}{m} \tag{2}$$

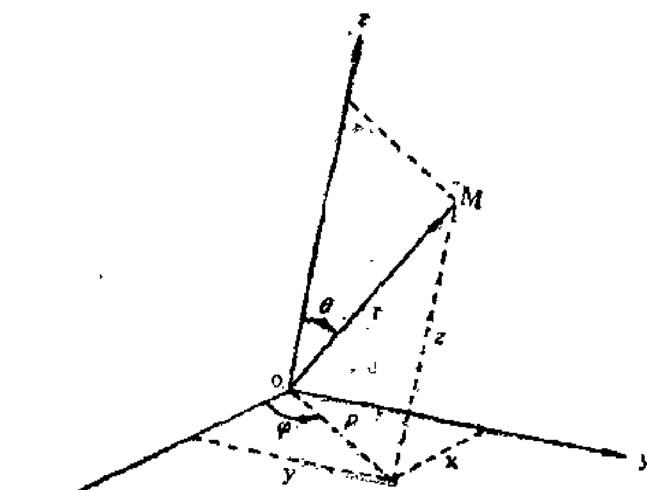


图 3.2

因此，由哈密顿函数的定义得

$$H=\left[\sum_{i=1}^{3} p_i\dot{q}_i-L\right]_{\dot{q}_i\to p_i}$$

$$=\frac{p_x^2}{m}+\frac{p_y^2}{m}+\frac{p_z^2}{m}-\frac{1}{2}m\left(\frac{p_x^2}{m^2}+\frac{p_y^2}{m^2}+\frac{p_z^2}{m^2}\right)+V(x,y,z)$$

$$=\frac{1}{2m}(p_x^2+p_y^2+p_z^2)+V(x,y,z) \tag{3}$$

ii. 园柱坐标：由于自由质点具有三个自由度，故选ρ，φ，z为相应的广义坐标。于是，自由质点的拉格朗日函数为

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\varphi}^2+\dot{z}^2)-V(\rho,\varphi,z) \tag{4}$$

由广义动量的定义得：

$$p_\rho=\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}}=m\dot{\rho}$$

$$p_\varphi=\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}=m\rho^2\dot{\varphi}$$

$$p_z=\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}=m\dot{z}$$

故有 $\dot{\rho}=\frac{p_\rho}{m}$，$\dot{\varphi}=\frac{p_\varphi}{m\rho^2}$，$\dot{z}=\frac{p_z}{m}$ （5）

因此，由哈密顿函数的定义得

$$H=\left[\sum_{i=1}^{3} p_i\dot{q}_i-L\right]_{\dot{q}_i\to p_i}$$

$$=\frac{p_\rho^2}{m}+\frac{p_\varphi^2}{m}+\frac{p_z^2}{m}-\frac{1}{2}m\left(\frac{p_\rho^2}{m^2}+\frac{\rho^2p_\varphi^2}{m^2\rho^4}+\frac{p_z^2}{m^2}\right)+V(\rho,\varphi,z)$$

$$=\frac{1}{2m}\left(p_\rho^2+\frac{p_\varphi^2}{\rho^2}+p_z^2\right)+V(\rho,\varphi,z) \qquad (6$$

iii．球坐标：由于自由质点具有三个自由度，故选 r，θ，φ 为相应的广义坐标于是，自由质点的拉格朗日函数为

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2)-V(r,\theta,\varphi)$$

由广义动量的定义得

$$p_r=\frac{\partial L}{\partial\dot{r}}=m\dot{r}$$

$$p_\theta=\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=mr^2\dot{\theta}$$

$$p_\varphi=\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}=mr^2\sin^2\theta\dot{\varphi}$$

故有

$$\dot{r}=\frac{p_r}{m}$$

$$\dot{\theta}=\frac{p_\theta}{mr^2} \qquad (7$$

$$\dot{\varphi}=\frac{p_\varphi}{mr^2\sin^2\theta}$$

因此，由哈密顿函数的定义得

$$H=\left[\sum_{i=1}^{3}p_i\dot{q}_i-L\right]_{\dot{q}_i\to p_i}$$

$$=\frac{p_r^2}{m}+\frac{p_\theta^2}{mr^2}+\frac{p_\varphi^2}{mr^2\sin^2\theta}-$$

$$-\frac{1}{2}m\left(\frac{p_r^2}{m^2}+\frac{r^2p_\theta^2}{m^2r^4}+\frac{r^2\sin^2\theta p_\varphi}{m^2r^4\sin^4\theta}\right)+V(r,\theta,\varphi)$$

$$=\frac{1}{2m}\left(p_r^2+\frac{p_\theta^2}{r^2}+\frac{p_\varphi^2}{r^2\sin^2\theta}\right)+V(r,\theta,\varphi)$$

例2：试写出质量为m的自由质点在以匀角速度ω的旋转坐标系中，受势场V(
y，z)的作用而运动的哈密顿函数。

解： 选如图3.3所示的$o\xi\eta\zeta$为固定坐标系；$oxyz$为旋转坐标系，ω为瞬时角速度（即$oxyz$运动坐标系绕$o\xi\eta\zeta$固定坐标系旋转的角速度）。显然，自由质点具有三个自由度，故选x，y，z为相应的广义坐标。

由相对运动的速度公式得自由质点的速度$\mathbf{V}$为

$$\mathbf{V}=\mathbf{V}_r+\omega\times\mathbf{r}$$
$$=(\dot{x}\mathbf{i}+\dot{y}\mathbf{j}+\dot{z}\mathbf{k})+(\omega_x\mathbf{i}+\omega_y\mathbf{j}+\omega_z\mathbf{k})\times(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k})$$
$$=(\dot{x}+\omega_y z-\omega_z y)\mathbf{i}+(\dot{y}+\omega_z x-\omega_x z)\mathbf{j}+(\dot{z}+\omega_x y-\omega_y x)\mathbf{k}$$

于是，自由质点的拉格朗日函数为

$$L=\frac{1}{2}m[(\dot{x}+\omega_y z-\omega_z y)^2+(\dot{y}+\omega_z x-\omega_x z)^2+(\dot{z}+\omega_x y-\omega_y x)^2]-$$
$$-V(x,y,z) \tag{1}$$

由广义动量的定义得

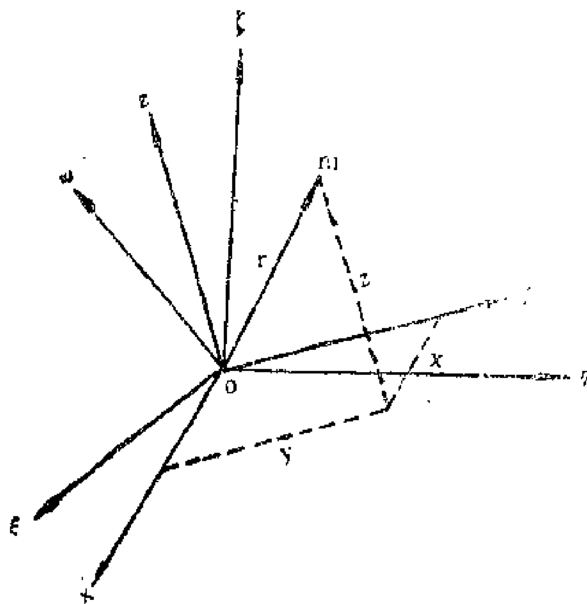


图 3.3

$$p_x=\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=m(\dot{x}+\omega_y z-\omega_z y)$$
$$p_y=\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}=m(\dot{y}+\omega_z x-\omega_x z)$$
$$p_z=\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}=m(\dot{z}+\omega_x y-\omega_y x)$$

所以

$$\dot{x}=\frac{p_x}{m}-\omega_y z+\omega_z y$$
$$\dot{y}=\frac{p_y}{m}-\omega_z x+\omega_x z \tag{2}$$
$$\dot{z}=\frac{p_z}{m}-\omega_x y+\omega_y x$$

因此，由哈密顿函数的定义得

$$H=\left[\sum_{i=1}^{3} p_i \dot{q}_i - L\right]_{\dot{q}_i\to p_i} = [p_x\dot{x}+p_y\dot{y}+p_z\dot{z}-L]_{\dot{q}_i\to p_i} \qquad (3)$$

把（1）式与（2）式同时代入（3）式并经整理得

$$H=\frac{1}{2m}(p_x^2+p_y^2+p_z^2)-p_x(\omega_y z-\omega_z y)-p_y(\omega_z x-\omega_x z)-p_z(\omega_x y-\omega_y x)+V$$

$$=\frac{\mathbf{p}^2}{2m}-\mathbf{p}\cdot(\omega\times\mathbf{r})+V$$

$$=\frac{\mathbf{p}^2}{2m}-\omega\cdot(\mathbf{r}\times\mathbf{p})+V$$

例3：质点在电磁场中运动的拉格朗日函数为

$$L=\frac{mU^2}{2}-q\varphi+\frac{q}{c}\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}$$

式中φ为标势，$\mathbf{A}$为矢势，试证其广义动量

$$p_i=mv_i+\frac{q}{c}A_i$$

其哈密顿函数为

$$H=\frac{mv^2}{2}+q\varphi=\frac{1}{2m}\left(\mathbf{p}-\frac{q}{c}\mathbf{A}\right)^2+q\varphi$$

证：由广义动量的定义

$$p_i=\frac{\partial L}{\partial v_i}$$

$$=\frac{\partial}{\partial v_i}\left(\frac{mv^2}{2}-q\varphi+\frac{q}{c}\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}\right)$$

$$=\frac{\partial}{\partial v_i}\left(\frac{1}{2}m\sum_i v_i^2-q\varphi+\frac{q}{c}\sum_i A_i v_i\right)$$

$$=mv_i+\frac{q}{c}A_i$$

故得证。

又由哈密顿函数的定义得

$$H=\sum_i p_i v_i-L$$

$$=\sum_i\left(mv_i+\frac{q}{c}A_i\right)v_i-L$$

$$=\sum_i mv_i^2+\sum_i\frac{q}{c}A_i v_i-\frac{mv^2}{2}+q\varphi-\frac{q}{c}\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}$$

$$=mv^2+\frac{q}{c}\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}-\frac{mv^2}{2}+q\varphi-\frac{q}{c}\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}$$

$$=\frac{1}{2}mv^2+q\varphi \tag{1}$$

又由于 $p_i=mv_i+\frac{q}{c}A_i$

所以 $\mathbf{p}=m\mathbf{v}+\frac{q}{c}\mathbf{A}$

于是 $\mathbf{v}=\frac{1}{m}\left(\mathbf{p}-\frac{q}{c}\mathbf{A}\right)$

即 $$v^2=\mathbf{v}^2=\frac{1}{m^2}\left(\mathbf{p}-\frac{q}{c}\mathbf{A}\right)^2 \tag{2}$$

因此把（2）式代入（1）式得

$$H=\frac{1}{2}mv^2+q\varphi=\frac{1}{2m}\left(\mathbf{p}-\frac{q}{c}\mathbf{A}\right)^2+q\varphi$$

例4： 一个质量为m的质点系到一条刚度系数为k、无伸长时的长度为l_0的弹性细绳上，假定运动是在铅直平面内进行，试用哈密顿正则方程求此弹性摆的运动微分方程。

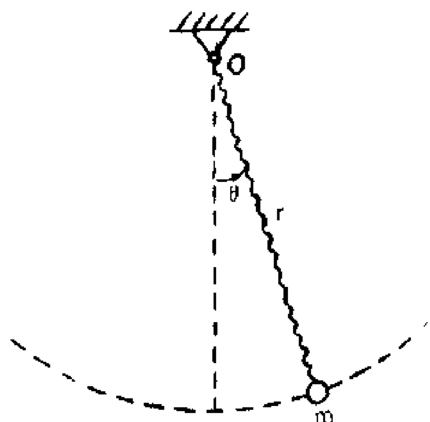


图3.4

解：选如图3.4所示的坐标系，显然弹性摆具有二个自由度，故选r、θ为相应的广义坐标。于是，弹性摆的动能为

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)$$

若选O点为重力势能的参考点；l_0处为弹性细绳势能的参考位置时，那么弹性摆的势能为

$$V=-mgr\cos\theta+\frac{1}{2}k(r-l_0)^2$$

因而，弹性摆的拉格朗日函数为

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)+mgr\cos\theta-\frac{1}{2}k(r-l_0)^2$$

由广义动量的定义得

$$p_r=\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}=m\dot{r}$$

$$p_{\theta}=\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}=mr^2\dot{\theta}$$

故有 $$\dot{r}=\frac{p_r}{m}$$

$$\dot{\theta}=\frac{p_\theta}{mr^2}$$

所以弹性摆的哈密顿函数可表为

$$H=\left[\sum_{i=1}^{2} p_i\dot{q}_i-L\right]_{\dot{q}_i\to p_i}$$

$$=\frac{p_r^2}{m}+\frac{p_\theta^2}{mr^2}-\frac{1}{2}m\left(\frac{p_\theta^2}{m^2}+\frac{r^2p_\theta^2}{m^2r^4}\right)-mgr\cos\theta+$$

$$+\frac{1}{2}k(r-l_0)^2$$

$$=\frac{1}{2m}\left(p_r^2+\frac{p_\theta^2}{r^2}\right)-mgr\cos\theta+\frac{1}{2}k(r-l_0)^2 \qquad (1)$$

由正则方程

$q_1=r$：

$$\begin{cases}\dot{p}_r=-\dfrac{\partial H}{\partial r}\\ \dot{r}=\dfrac{\partial H}{\partial p_r}\end{cases}$$

得

$$\begin{cases}\dot{p}_r=\dfrac{1}{m}\cdot\dfrac{p_\theta^2}{r^3}+mg\cos\theta-k(r-l_0) & (2)\\ \dot{r}=\dfrac{p_r}{m} & (3)\end{cases}$$

由正则方程

$q_2=\theta$：

$$\begin{cases}\dot{p}_\theta=-\dfrac{\partial H}{\partial \theta}\\ \dot{\theta}=\dfrac{\partial H}{\partial p_\theta}\end{cases}$$

得

$$\begin{cases}\dot{p}_\theta=-mgr\sin\theta & (4)\\ \dot{\theta}=\dfrac{p_\theta}{mr^2} & (5)\end{cases}$$

把（3）式对 t 求导后与（5）式同时代入（2）式便得

$$m(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)=mg\cos\theta-k(r-l_0) \qquad (6)$$

把（5）式对 t 求导后代入（4）式即得

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta})=-mgr\sin\theta$$

或者 $$m(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta})=-mg\sin\theta \qquad (7)$$

因此，弹性摆的运动微分方程为

$$\begin{cases}m(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)=mg\cos\theta-k(r-l_0)\\ m(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta})=-mg\sin\theta\end{cases}$$

例5：试用哈密顿正则方程求质量为m、摆长为l的球面摆的运动微分方程。

解：由于球面摆具有二个自由度，故选θ，φ为广义坐标，如图3.5所示。球面摆的动能为

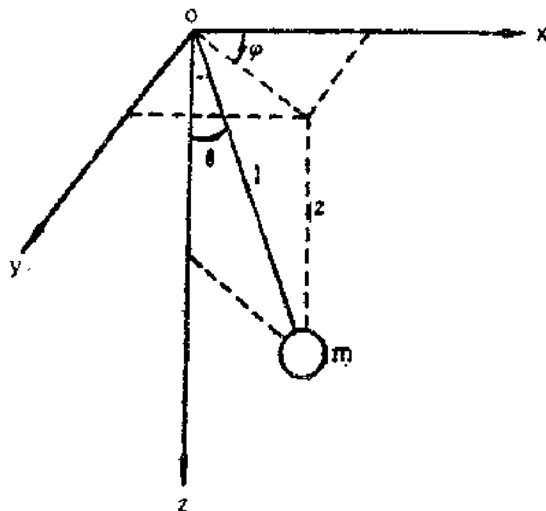


图3.5

$$T=\frac{1}{2}m(l^2\dot{\theta}^2+l^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2)$$

若选O点为势能的参考点时，那么球面摆势能为

$$V=-mgz=-mgl\cos\theta$$

因而，球面摆的拉格朗日函数为

$$L=T-V=\frac{1}{2}m(l^2\dot{\theta}^2+l^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2)+mgl\cos\theta$$

由广义动量的定义得

$$p_\theta=\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=ml^2\dot{\theta}$$

$$p_\varphi=\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}=ml^2\sin^2\theta\dot{\varphi}$$

故有

$$\dot{\theta}=\frac{p_\theta}{ml^2}$$

$$\dot{\varphi}=\frac{p_\varphi}{ml^2\sin^2\theta}$$

所以，球面摆的哈密顿函数可表为

$$H=\left[\sum_{i=1}^{2}p_i\dot{q}_i-L\right]_{\dot{q}_i\to p_i}$$

$$=\frac{p_\theta^2}{ml^2}+\frac{p_\varphi^2}{ml^2\sin^2\theta}-\frac{1}{2}m\left(l^2\cdot\frac{p_\theta^2}{m^2l^4}+l^2\sin^2\theta\cdot\right.$$

$$\cdot \frac{p_\varphi^2}{m^2 l^4 \sin^4\theta}\Big) - mgl\cos\theta$$

$$= \frac{1}{2m}\left(\frac{p_\theta^2}{l^2} + \frac{p_\varphi^2}{l^2\sin^2\theta}\right) - mgl\cos\theta \qquad (1)$$

由正则方程

$q_1 = \theta$:

$$\begin{cases} \dot{p}_\theta = -\dfrac{\partial H}{\partial \theta} \\ \dot{\theta} = \dfrac{\partial H}{\partial p_\theta} \end{cases}$$

得

$$\begin{cases} \dot{p}_\theta = \dfrac{\cos\theta \cdot p_\varphi^2}{ml^2\sin^3\theta} - mgl\sin\theta & (2) \\ \dot{\theta} = \dfrac{p_\theta}{ml^2} & (3) \end{cases}$$

又由正则方程

$q_2 = \varphi$:

$$\begin{cases} \dot{p}_\varphi = -\dfrac{\partial H}{\partial \varphi} \\ \dot{\varphi} = \dfrac{\partial H}{\partial p_\varphi} \end{cases}$$

得

$$\begin{cases} \dot{p}_\varphi = 0 & (4) \\ \dot{\varphi} = \dfrac{p_\varphi}{ml^2\sin^2\theta} & (5) \end{cases}$$

把（3）式对 t 求导后与（5）式同时代入（2）式并经整理得

$$m(l\ddot{\theta} - l\sin\theta\cdot\cos\theta\dot{\varphi}^2) = -mg\sin\theta \qquad (6)$$

把（5）式对 t 求导后代入（4）式便得

$$\frac{d}{dt}(ml^2\sin^2\theta\dot{\varphi}) = 0$$

即
$$ml^2\sin^2\theta\dot{\varphi} = 常数 \qquad (7)$$

因此，球面摆的运动微分方程为

$$\begin{cases} m(l\ddot{\theta} - l\sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2) = -mg\sin\theta \\ ml^2\sin^2\theta\dot{\varphi} = 常数 \end{cases}$$

例6：试应用哈密顿正则方程导出电子在库仑场中运动的微分方程.

解：设库仑场带电为 q，电子质量为 m、带电为 $-e$. 由于电子在库仑场中所受的力为有心力，所以它的轨道是平面曲线. 因此，它具有二个自由度，故选 r、φ 为相应的广义坐标. 于是，电子的动能为

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2)$$

而势能为

$$V=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{qe}{r}$$

式中 ε_0 为介电常数。因而，电子的拉格朗日函数为

$$L=T-V=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2)+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{qe}{r}$$

由广义动量的定义得

$$\begin{cases} p_r=\dfrac{\partial L}{\partial \dot{r}}=m\dot{r} \\ p_\varphi=\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}=mr^2\dot{\varphi} \end{cases}$$

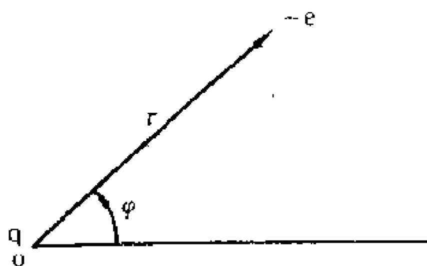


图 3.6

故有 $$\dot{r}=\frac{p_r}{m}$$

$$\dot{\varphi}=\frac{p_\varphi}{mr^2}$$

所以，电子的哈密顿函数可表示为

$$H=\left[\sum_{i=1}^{2}p_i\dot{q}_i-L\right]_{\dot{q}_i\to p_i}$$

$$=\frac{p_r^2}{m}+\frac{p_\varphi^2}{mr^2}-\frac{1}{2}m\left(\frac{p_r^2}{m^2}+\frac{r^2p_\varphi^2}{m^2r^4}\right)-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qe}{r}$$

$$=\frac{1}{2m}\left(p_r^2+\frac{p_\varphi^2}{r^2}\right)-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{qe}{r} \qquad (1)$$

由哈密顿正则方程

$q_1=r$：
$$\begin{cases} \dot{p}_r=-\dfrac{\partial H}{\partial r} \\ \dot{r}=\dfrac{\partial H}{\partial p_r} \end{cases}$$

得
$$\begin{cases} \dot{p}_r=\dfrac{p_\varphi^2}{mr^3}-\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\dfrac{qe}{r^2} & (2) \\ \dot{r}=\dfrac{p_r}{m} & (3) \end{cases}$$

又由哈密顿正则方程

$q_2=\varphi$：
$$\begin{cases} \dot{p}_\varphi=-\dfrac{\partial H}{\partial \varphi} \\ \dot{\varphi}=\dfrac{\partial H}{\partial p_\varphi} \end{cases}$$

得
$$\begin{cases}\dot{p}_{\varphi}=0 & (4)\\ \dot{\varphi}=\dfrac{p_{\varphi}}{mr^{2}} & (5)\end{cases}$$

将（3）式对 t 求导后与（5）式同时代入（2）式并经整理得

$$m(\ddot{r}-r\dot{\varphi}^{2})=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_{0}}\cdot\frac{qe}{r^{2}} \qquad (6)$$

把（5）式对 t 求导后代入（4）式便得

$$\frac{d}{dt}(mr^{2}\dot{\varphi})=0$$

即
$$mr^{2}\dot{\varphi}=\text{常量} \qquad (7)$$

因此，电子在库仑场中运动的微分方程为

$$m(\ddot{r}-r\dot{\varphi}^{2})=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_{0}}\cdot\frac{qe}{r^{2}}$$

$$mr^{2}\dot{\varphi}=\text{常量}$$

例7：一个质量为m的质点，在半径为R的园柱表面上，受到园柱体轴心的引力作用，此引力的大小与质点到轴心的距离成正比（即$\mathbf{F}=-k\mathbf{r}$）。试用哈密顿正则方程求解此质点的运动。

解：选如图3.7所示的坐标系，原点在园柱的轴心O上，那么M点的坐标为$(R,\varphi$

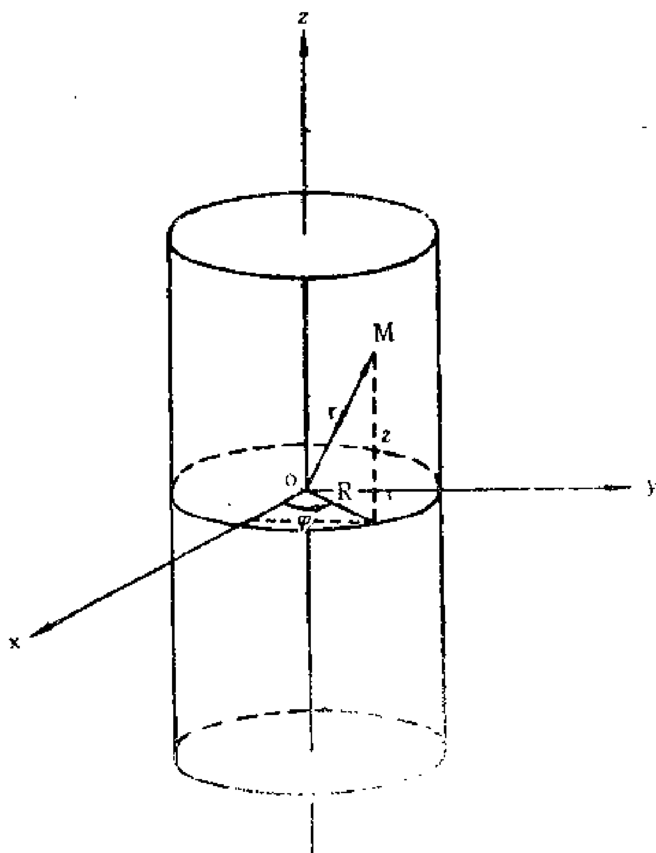


图3.7

z）。由于R为常数，所以质点M具有二个自由度，故选φ，z为相应的广义坐标。于是，M点的动能为

$$T=\frac{1}{2}m(R^2\dot{\varphi}^2+\dot{z}^2)$$

而势能为

$$V=-\int_0^r \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\int_0^r k\mathbf{r}\cdot d\mathbf{r}=\int_0^r krdr=\frac{1}{2}kr^2$$

（此处$\mathbf{r}\cdot d\mathbf{r}=rdr$在§1—3里的例题9已经证明过了。）

由于约束条件　$r^2=R^2+z^2$，所以上述势能表达式又可改写为

$$V=\frac{1}{2}k(R^2+z^2)$$

于是，质点M的拉格朗日函数为

$$L=T-V=\frac{1}{2}m(R^2\dot{\varphi}^2+\dot{z}^2)-\frac{1}{2}k(R^2+z^2)$$

由广义动量的定义得

$$p_\varphi=\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}=mR^2\dot{\varphi}$$

$$p_z=\frac{\partial L}{\partial\dot{z}}=m\dot{z}$$

故有

$$\dot{\varphi}=\frac{p_\varphi}{mR^2}$$

$$\dot{z}=\frac{p_z}{m}$$

所以质点M的哈密顿函数为

$$H=\left[\sum_{i=1}^{2}p_i\dot{q}_i-L\right]_{\dot{q}_i\to p_i}$$

$$=\frac{p_\varphi^2}{mR^2}+\frac{p_z^2}{m}-\frac{1}{2}m\left(\frac{R^2p_\varphi^2}{m^2R^4}+\frac{p_z^2}{m^2}\right)+\frac{1}{2}k(R^2+z^2)$$

$$=\frac{1}{2m}\left(\frac{p_\varphi^2}{R^2}+p_z^2\right)+\frac{1}{2}k(R^2+z^2) \qquad (1)$$

由哈密顿正则方程

$q_1=\varphi$，

$$\begin{cases}\dot{p}_\varphi=-\dfrac{\partial H}{\partial\varphi}\\[2ex]\dot{\varphi}=\dfrac{\partial H}{\partial p_\varphi}\end{cases}$$

得

$$\dot{p}_\varphi=0 \qquad (2)$$

$$\dot{\varphi}=\frac{p_\varphi}{mR^2} \qquad (3)$$

又由哈密顿正则方程

$q_2=z$：
$$\dot{p}_z=-\frac{\partial H}{\partial z}$$

$$\dot{z}=\frac{\partial H}{\partial p_z}$$

得
$$\dot{p}_z=-kz \tag{4}$$

$$\dot{z}=\frac{p_z}{m} \tag{5}$$

将（3）式对 t 求导后代入（2）式得

$$\frac{d}{dt}(mR^2\dot{\varphi})=0$$

即
$$mR^2\dot{\varphi}=\text{常数}$$

或者
$$\dot{\varphi}=c_1(\text{常数})$$

把上式积分一次得

$$\varphi=c_1t+c_2 \tag{6}$$

式中 c_1、c_2 为积分常数。将（5）式对 t 求导后代入（4）式得

$$m\ddot{z}+kz=0$$

即
$$\ddot{z}+\frac{k}{m}z=0$$

由于 $\frac{k}{m}>0$，所以上述方程为谐振方程，其解为

$$z=A\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t+\alpha\right) \tag{7}$$

式中 A、α 为积分常数。因此（6）式与（7）式便为质点 M 的运动规律。

例8：半径为 r 的均质小园柱，自半径为 R 的固定大园柱的顶端无初速地滚下（纯滚动无滑动），试用哈密顿正则方程求小园柱质心下降的加速度（以 θ 角表示，θ 角为两园柱心的联线与铅直线之间的夹角）。

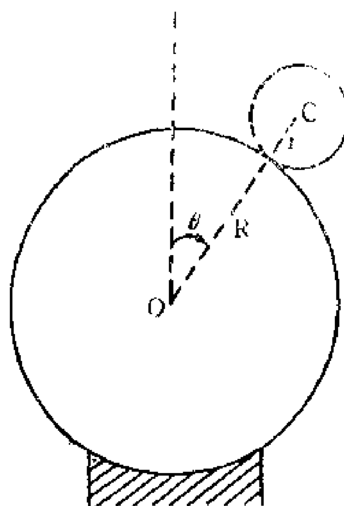


图3.8

解：小园柱具有一个自由度，故选 θ 为广义坐标，如图3.8所示。由于小园柱是作平面平行运动，所以小园柱的动能为

$$T=\frac{1}{2}m(R+r)^2\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}J_c\omega_c^2$$

式中 m 为小园柱的质量，J_c 为小园柱对过质心 C 的转动轴的转动惯量，ω_c 为小园柱绕其自身转动轴的转动角速度。由题设条件得

$$J_c=\frac{1}{2}mr^2 \quad , \qquad \omega_c=\frac{(R+r)}{r}\dot{\theta}$$

所以，小园柱的动能又可表示为

$$T=\frac{3}{4}m(R+r)^2\dot{\theta}^2$$

若选O点为势能的参考点时，那么小园柱的势能为

$$V=mg(R+r)\cos\theta$$

于是，小园柱的拉格朗日函数为

$$L=T-V=\frac{3}{4}m(R+r)^2\dot{\theta}^2-mg(R+r)\cos\theta$$

由广义动量的定义得

$$p_\theta=\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=\frac{3}{2}m(R+r)^2\dot{\theta}$$

故有 $\qquad \dot{\theta}=\frac{2p_\theta}{3m(R+r)^2}$

所以，小园柱的哈密顿函数可表为

$$H=[p_\theta\dot{\theta}-L]_{\dot{\theta}\to p_\theta}$$

$$=\frac{2p_\theta^2}{3m(R+r)^2}-\frac{3}{4}m(R+r)^2\cdot\frac{4p_\theta^2}{9m^2(R+r)^4}+mg(R+r)\cos\theta$$

$$=\frac{p_\theta^2}{3m(R+r)^2}+mg(R+r)\cos\theta \qquad (1)$$

由哈密顿正则方程

$$\left\{\begin{array}{ll} \dot{p}_\theta=-\frac{\partial H}{\partial\theta} & \text{得} \quad \dot{p}_\theta=mg(R+r)\sin\theta \qquad (2) \\ \dot{\theta}=\frac{\partial H}{\partial p_\theta} & \qquad \dot{\theta}=\frac{2p_\theta}{3m(R+r)^2} \qquad (3) \end{array}\right.$$

把（3）式对t求导后代入（2）式便得

$$\frac{3}{2}m(R+r)^2\ddot{\theta}=mg(R+r)\sin\theta$$

故有 $\qquad \ddot{\theta}=\frac{2}{3}\cdot\frac{g}{(R+r)}\sin\theta \qquad (4)$

因此，小园柱质心下降的加速度为

$$a=(R+r)\ddot{\theta}=\frac{2}{3}g\sin\theta \qquad (5)$$

例9：在一光滑直管中有一质量为m的小球，此管以等角速度ω绕通过其一端的水平轴转动，在起始瞬时，球距转动轴的距离为a，球相对于管的速度为$\frac{g}{2\omega}$。试用哈密顿正则方程求小球沿管的运动规律。

解：小球具有二个自由度，故选 r，θ 为广义坐标。由题设得知：$\dot{\theta}=\omega=$常数，所以小球的动能为

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\omega^2)$$

若选水平轴为势能的参考位置时，那么小球的势能为

$$V=mgr\sin\theta=mgr\sin\omega t$$

于是，小球的拉格朗日函数为

$$L=T-V=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\omega^2)-mgr\sin\omega t$$

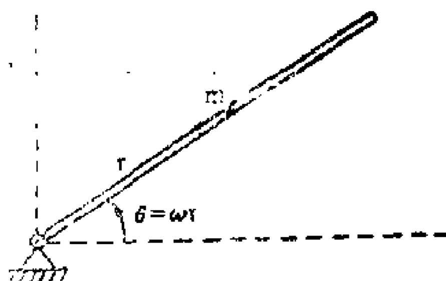


图 3.9

由广义动量的定义得

$$p_r=\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}=m\dot{r}$$

$$p_\theta=\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}=\frac{\partial L}{\partial \omega}=mr^2\omega$$

故有

$$\dot{r}=\frac{p_r}{m}$$

$$\dot{\theta}=\omega=\frac{p_\theta}{mr^2}$$

所以，小球的哈密顿函数可表为

$$H=\left[\sum_{i=1}^{2}p_i\dot{q}_i-L\right]_{\dot{q}_i\to p_i}$$

$$=\frac{p_r^2}{m}+\frac{p_\theta^2}{mr^2}-\frac{1}{2}m\left(\frac{p_r^2}{m^2}+\frac{r^2p_\theta^2}{m^2r^4}\right)+mgr\sin\omega t$$

$$=\frac{1}{2m}\left(p_r^2+\frac{p_\theta^2}{r^2}\right)+mgr\sin\omega t \quad (1)$$

由哈密顿正则方程

$q_1=r$：

$$\dot{p}_r=-\frac{\partial H}{\partial r}$$

$$\dot{r}=\frac{\partial H}{\partial p_r}$$

得

$$\dot{p}_r=-\left(\frac{1}{2m}\cdot\frac{-2p_\theta^2}{r^3}\right)-mg\sin\omega t=m\omega^2r-mg\sin\omega t \quad (2)$$

$$\dot{r}=\frac{p_r}{m} \quad (3)$$

把（3）式对 t 求导后代入（2）式即得

$$m\ddot{r}=m\omega^2 r-mg\sin\omega t$$

或
$$\ddot{r}-\omega^2 r=-g\sin\omega t \qquad (4)$$

参照§2-2中的例题11的具体解法，可得非齐次微分方程（4）的通解为：

$$r=c_1e^{\omega t}+c_2e^{-\omega t}+\frac{g}{2\omega^2}\sin\omega t \qquad (5)$$

当 $t=0$ 时，$r=a$，　$\dot{r}=\frac{g}{2\omega}$　　故得

$$\begin{cases} c_1+c_2=a & (6)\\ c_1-c_2=0 & (7)\end{cases}$$

联立（6）式与（7）式解得

$$c_1=c_2=\frac{a}{2} \qquad (8)$$

把（8）式代入（5）式便得

$$r=\frac{a}{2}\left(e^{\omega t}+e^{-\omega t}\right)+\frac{g}{2\omega^2}\sin\omega t$$

$$=a\operatorname{ch}(\omega t)+\frac{g}{2\omega^2}\sin\omega t \qquad (9)$$

（9）式便是小球相对于管的运动规律。

例10：一铁线 AB 无摩擦固定于 A 点，与垂直线 OA 所成的角度 α 为常数。设一质量为 m 的小环可以在铁线 AB 上自由滑动。当铁线 AB 以等角速度 ω 绕 OA 转动时，试用哈密顿正则方程求小环相对于铁线 AB 的运动规律。假设 $OA=h$，$AB=l$。开始时，小环静止于 A 点，问经多久小环才能达到 B 端？

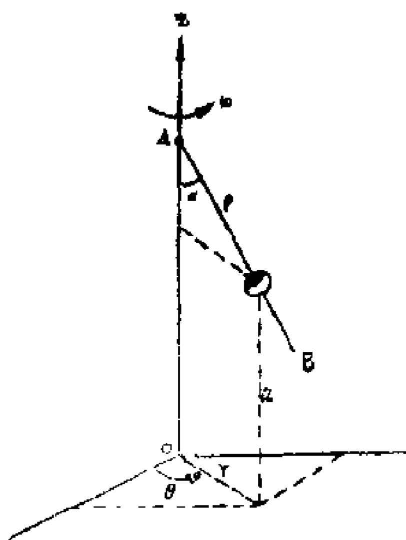


图3.10

解：选如图3.10所示的坐标系，那么小环的动能为

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+\dot{z}^2)$$

由图示可得

$$r=\rho\sin\alpha$$

$$z=h-\rho\cos\alpha$$

$$\dot{\theta}=\omega\text{（常数）}$$

所以，小环的动能又可表示为

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2+\omega^2\sin^2\alpha\cdot\rho^2) \qquad (1)$$

故选ρ为广义坐标。

若选oxy平面为势能的参考面时，那么小环的势能可写为

$$V=mgz=mg(h-\rho\cos\alpha) \tag{2}$$

于是，小环的拉格朗日函数为

$$L=T-V=\frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2+\omega^2\sin^2\alpha\rho^2)-mg(h-\rho\cos\alpha)$$

由广义动量的定义得：

$$p_\rho=\frac{\partial L}{\partial\dot{\rho}}=m\dot{\rho}$$

故有 $$\dot{\rho}=\frac{p_\rho}{m}$$

所以，小环的哈密顿函数可表为

$$H=[P_\rho\dot{\rho}-L]_{\dot{\rho}\to P_\rho}$$

$$=\frac{p_\rho^2}{m}-\frac{1}{2}m\left(\frac{p_\rho^2}{m^2}+\omega^2\sin^2\alpha\rho^2\right)+mg(h-\rho\cos\alpha)$$

$$=\frac{p_\rho^2}{2m}-\frac{1}{2}m\omega^2\sin^2\alpha\rho^2+mg(h-\rho\cos\alpha) \tag{3}$$

由哈密顿正则方程

$$\begin{cases}\dot{P}_\rho=-\dfrac{\partial H}{\partial\rho}\\[2ex] \dot{\rho}=\dfrac{\partial H}{\partial p_\rho}\end{cases}$$

得
$$\begin{cases}\dot{P}_\rho=-(-m\omega^2\sin^2\alpha\rho-mg\cos\alpha)=m\omega^2\sin^2\alpha\rho+mg\cos\alpha & (4)\\[1ex] \dot{\rho}=\dfrac{p_\rho}{m} & (5)\end{cases}$$

把（5）式对t求导后代入（4）式便得

$$m\ddot{\rho}=m\omega^2\sin^2\alpha\rho+mg\cos\alpha$$

即 $$\ddot{\rho}-\omega^2\sin^2\alpha\rho=g\cos\alpha \tag{6}$$

此为二阶线性常系数非齐次的常微分方程，其对应的齐次方程的特征方程为

$$\lambda^2-\omega^2\sin^2\alpha=0$$

故得特征根 $\lambda=\pm\omega\sin\alpha$

于是，对应齐次方程的一般解为

$$\rho^*=c_1e^{\omega\sin\alpha t}+c_2e^{-\omega\sin\alpha t}$$

而非齐次方程的一个特解为$\rho^{**}=a$，代入原方程（6）得

$$a=-\frac{g\cos\alpha}{\omega^2\sin^2\alpha}$$

所以，非齐次微分方程（6）的通解

$$\rho=c_1 e^{\omega\sin\alpha t}+c_2 e^{-\omega\sin\alpha t}-\frac{g\cos\alpha}{\omega^2\sin^2\alpha} \qquad (7)$$

由于$t=0$时， $\rho=0$， $\dot{\rho}=0$， 故有

$$\begin{cases} c_1+c_2=\dfrac{g\cos\alpha}{\omega^2\sin^2\alpha} \\ c_1-c_2=0 \end{cases}$$

联立上述方程组解得

$$c_1=c_2=\frac{1}{2}\cdot\frac{g\cos\alpha}{\omega^2\sin^2\alpha} \qquad (8)$$

把（8）式代入（7）式得

$$\rho=\frac{g\cos\alpha}{2\omega^2\sin^2\alpha}(e^{\omega\sin\alpha t}+e^{-\omega\sin\alpha t})-\frac{g\cos\alpha}{\omega^2\sin^2\alpha}$$

或者 $$\rho=\frac{g\cos\alpha}{\omega^2\sin^2\alpha}\left[\operatorname{ch}(\omega\sin\alpha t)-1\right] \qquad (9)$$

（9）式便是小环相对于铁线AB的运动规律。

当$\rho=l$时

$$l=\frac{g\cos\alpha}{\omega^2\sin^2\alpha}\left[\operatorname{ch}(\omega\sin\alpha t)-1\right]$$

故 $$\operatorname{ch}(\omega\sin\alpha t)=\frac{\omega^2\sin^2\alpha\, l}{g\cos\alpha}+1$$

即 $$\omega\sin\alpha t=\operatorname{ch}^{-1}\left(\frac{\omega^2\sin^2\alpha\, l}{g\cos\alpha}+1\right)$$

于是， $$t=\frac{1}{\omega\sin\alpha}\ln\left[\left(\frac{\omega^2\sin^2\alpha\, l}{g\cos\alpha}+1\right)+\sqrt{\left(\frac{\omega^2\sin^2\alpha\, l}{g\cos\alpha}+1\right)^2-1}\right]$$

例11 半径为R、质量为M的均质圆盘，装在半经为r、质量为m的均质圆柱形轴上，并由绕在此轴上的两条竖直线挂起（马克斯威尔摆）。开始时轴在水平位置，并且盘心至两线的距离相等，然后释放。求圆盘向下降落时，盘心的加速度。

解： 由于系统具有一个自由度，故选系统的质心C的坐标y_c为相应的广义坐标，如图3.11所示。于是系统的动能可表为

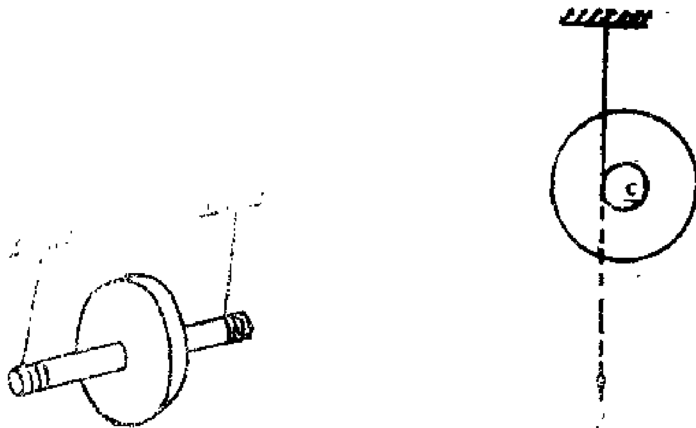


图3.11

$$T_c=\frac{1}{2}(m+M)\dot{y}_c^2+\frac{1}{2}J_c\dot{\varphi}^2$$

式中J_c为系统对过质心C且垂直于园盘面的转动轴的转动惯量，$\dot{\varphi}$ 为 系统绕过质心 C 转动轴的转动角速度。由题设得

$$J_c=\frac{1}{2}(MR^2+mr^2)$$

$$\dot{y}_c=r\dot{\varphi}$$

故系统的动能又可表示为

$$T=\frac{1}{2}(m+M)\dot{y}_c^2+\frac{1}{4}(MR^2+mr^2)\cdot\frac{\dot{y}_c^2}{r^2}$$

$$=\frac{1}{4r^2}[3mr^2+M(R^2+2r^2)]\dot{y}_c^2 \qquad (1)$$

若选 0 为势能的参考点时，那么系统的势能为

$$V=-(m+M)gy_c \qquad (2)$$

于是，系统的拉格朗日函数可表示为

$$L=T-V=\frac{1}{4r^2}[3mr^2+M(R^2+2r^2)]\dot{y}_c^2+(m+M)gy_c$$

由广义动量的定义得

$$p_{y_c}=\frac{\partial L}{\partial\dot{y}_c}=-\frac{1}{2r^2}[3mr^2+M(R^2+2r^2)]\dot{y}_c$$

故有 $$\dot{y}_c=\frac{2r^2Py_c}{3mr^2+M(R^2+2r^2)}$$

所以，系统的哈密顿函数可表为

$$H=[Py_c\dot{y}_c-L]_{\dot{y}_c\to Py_c}$$

$$=\frac{2r^2p_{y_c}^2}{3mr^2+M(R^2+2r^2)}-\frac{1}{4r^2}[3mr^2+M(R^2+2r^2)]\cdot$$

$$\cdot\frac{4r^4p_{y_c}^2}{[3mr^2+M(R^2+2r^2)]^2}-(m+M)gy_c$$

$$=\frac{r^2p_{y_c}^2}{3mr^2+M(R^2+2r^2)}-(m+M)gy_c \qquad (3)$$

由哈密顿正则方程

$$\begin{cases}\dot{P}y_c=-\dfrac{\partial H}{\partial y_c}\\[2ex]\dot{y}_c=\dfrac{\partial H}{\partial Py_c}\end{cases}$$

得

$$\begin{cases}\dot{P}y_c=(m+M)g & (4)\\[2ex]\dot{y}_c=\dfrac{2r^2Py_c}{3mr^2+M(R^2+2r^2)} & (5)\end{cases}$$

把（5）式对t求导后代入（4）式得

$$[3mr^2+M(R^2+2r^2)]\ddot{y}_c=2r^2(m+M)g$$

即 $$\ddot{y}_c=\frac{2r^2(m+M)g}{3mr^2+M(R^2+2r^2)}$$

例12 均质直杆AB，长度为$2l$，质量为m，它的两端靠在竖直墙和水平地板上（见图）。初始时，杆静止，$\theta=\theta_0$，不计摩擦，运动时杆保持在垂直于墙的竖直平面内。试用哈密顿正则方程求杆在任一位置的角速度ω（杆不脱离墙时）。

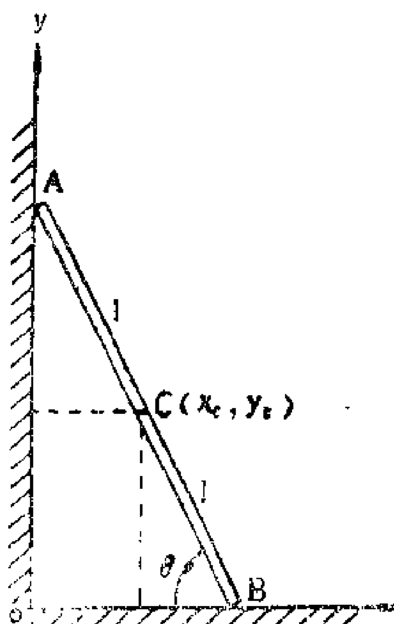


图3.12

解：由于系统具有一个自由度，故选θ为系统的广义坐标，如图3.12所示。于是，杆AB的质心坐标为

$$\begin{cases}x_c=l\cos\theta\\ y_c=l\sin\theta\end{cases}$$

其质心速度为

$$\begin{cases}\dot{x}_c=-l\sin\theta\,\dot{\theta}\\ \dot{y}_c=l\cos\theta\,\dot{\theta}\end{cases}$$

从而，系统的动能可表示为

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{x}_c^2+\dot{y}_c^2)+\frac{1}{2}J_c\dot{\theta}^2$$

式中J_c为杆AB对过质心C且垂直于杆的轴的转动惯量。由于杆作平面平行运动，所以$\dot{\theta}$也为杆绕过质心C且垂直于杆的转动轴的转动角速度。因而，系统的动能又可表示为

$$T=\frac{1}{2}m[(-l\sin\theta\,\dot{\theta})^2+(l\cos\theta\,\dot{\theta})^2]+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12}m(2l)^2\dot{\theta}^2$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}ml^2\dot{\theta}^2 \qquad (1)$$

若选ox轴为势能的参考位置时，那么系统的势能可表示为

$$V=mgy_c=mgl\sin\theta \qquad (2)$$

于是，系统的拉格朗日函数为

$$L=T-V=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}ml^2\dot{\theta}^2-mgl\sin\theta$$

由广义动量的定义得

$$P_\theta=\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=\frac{4}{3}ml^2\dot{\theta}$$

故有 $$\dot{\theta}=\frac{3P_\theta}{4ml^2}$$

所以，系统的哈密顿函数可表示为

$$H=[p_\theta\dot{\theta}-L]_{\dot{\theta}\to p_\theta}$$

$$=\frac{3p_\theta^2}{4ml^2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}ml^2\cdot\frac{9p_\theta^2}{16m^2l^4}+mgl\sin\theta$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{3p_\theta^2}{4ml^2}+mgl\sin\theta \qquad (3)$$

由哈密顿正则方程

$$\begin{cases}\dot{p}_\theta=-\dfrac{\partial H}{\partial\theta}\\[2mm]\dot{\theta}=\dfrac{\partial H}{\partial P_\theta}\end{cases}$$

得

$$\begin{cases}\dot{p}_\theta=-mgl\cos\theta & (4)\\[2mm]\dot{\theta}=\dfrac{3p_\theta}{4ml^2} & (5)\end{cases}$$

将（5）式对 t 求导后代入（4）式得

$$4ml^2\ddot{\theta}=-3mgl\cos\theta$$

即

$$\ddot{\theta}=-\frac{3g}{4l}\cos\theta \qquad (6)$$

由于 $\ddot{\theta}=\dfrac{d\dot{\theta}}{d\theta}\cdot\dfrac{d\theta}{dt}=\dot{\theta}\dfrac{d\dot{\theta}}{d\theta}$，所以（6）式又可改写为

$$\dot{\theta}d\dot{\theta}=-\frac{3g}{4l}\cos\theta d\theta$$

积分上式

$$\int_0^{\dot{\theta}}\dot{\theta}d\dot{\theta}=-\frac{3g}{4l}\int_{\theta_0}^{\theta}\cos\theta d\theta$$

得

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2=\frac{3g}{4l}(\sin\theta_0-\sin\theta)$$

或

$$\dot{\theta}^2=\frac{3g}{2l}(\sin\theta_0-\sin\theta)$$

于是

$$\dot{\theta}=\sqrt{\frac{3g}{2l}(\sin\theta_0-\sin\theta)}$$

上式的 $\dot{\theta}$ 便为杆任一瞬时的转动角速度。

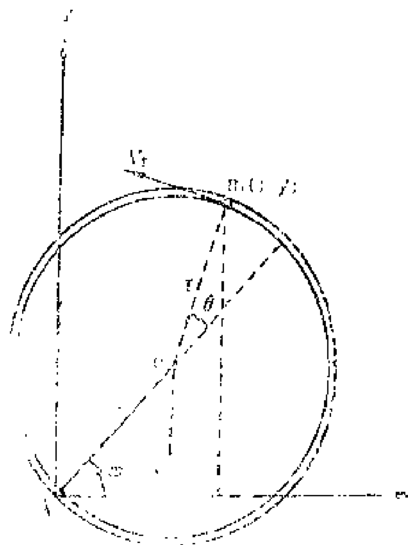


图3.13

例13　园管半经为r，以等角速度ω在水平面内绕其上A点转动。管中有一小球不受摩擦而移动。已知球的相对初速为V_{r0}，试用哈密顿正则方程求其相对速度。

解：选如图3.13所示的坐标系，那么小球的坐标为

$$\begin{cases}x=r\cos\varphi+r\cos(\varphi+\theta)\\y=r\sin\varphi+r\sin(\varphi+\theta)\end{cases}$$

故有

$$\begin{cases}\dot{x}=-r\sin\varphi\dot{\varphi}-r\sin(\varphi+\theta)(\dot{\varphi}+\dot{\theta})\\ \dot{y}=r\cos\varphi\dot{\varphi}+r\cos(\varphi+\theta)(\dot{\varphi}+\dot{\theta})\end{cases}$$

于是，小球的动能为

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)$$

$$=\frac{1}{2}m\{[-r\sin\varphi\dot{\varphi}-r\sin(\varphi+\theta)(\dot{\varphi}+\dot{\theta})]^2+$$

$$+[r\cos\varphi\dot{\varphi}+r\cos(\varphi+\theta)(\dot{\varphi}+\dot{\theta})]^2\}$$

$$=\frac{1}{2}mr^2[\dot{\varphi}^2+(\dot{\varphi}+\dot{\theta})^2+2\dot{\varphi}(\dot{\varphi}+\dot{\theta})\cos\theta]$$

由题给$\dot{\varphi}=\omega=$常数，故上述动能表达式又可改写为

$$T=\frac{1}{2}mr^2[\omega^2+(\omega+\dot{\theta})^2+2\omega(\omega+\dot{\theta})\cos\theta]$$

$$=\frac{1}{2}mr^2[\omega^2+\omega^2+2\omega\dot{\theta}+\dot{\theta}^2+2\omega^2\cos\theta+2\omega\dot{\theta}\cos\theta]$$

$$=\frac{1}{2}mr^2[2\omega^2(1+\cos\theta)+2\omega\dot{\theta}(1+\cos\theta)+\dot{\theta}^2]$$

$$=\frac{1}{2}mr^2[\dot{\theta}^2+2\omega(\omega+\dot{\theta})(1+\cos\theta)] \tag{1}$$

若选Axy水平面为势能的参考面时，那么小球的势能为

$$V=0 \tag{2}$$

故选θ为广义坐标。于是，小球的拉格朗日函数为

$$L=T-V=\frac{1}{2}mr^2[\dot{\theta}^2+2\omega(\omega+\dot{\theta})(1+\cos\theta)]$$

由广义动量的定义得

$$p_\theta=\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=mr^2\dot{\theta}+mr^2\omega(1+\cos\theta)=mr^2[\dot{\theta}+\omega(1+\cos\theta)]$$

故有 $$\dot{\theta}=\frac{p_\theta}{mr^2}-\omega(1+\cos\theta)$$

所以，小球的哈密顿函数可表为

$$H=[p_\theta\dot{\theta}-L]_{\dot{\theta}\to p_\theta}$$

$$=\frac{p_\theta^2}{mr^2}-\omega(1+\cos\theta)p_\theta-\frac{1}{2}mr^2\left[\frac{p_\theta}{mr^2}-\omega(1+\cos\theta)\right]^2-$$

$$-mr^2\omega(1+\cos\theta)\left[\omega+\frac{p_\theta}{mr^2}-\omega(1+\cos\theta)\right]$$

$$=mr^2\left\{\frac{1}{2}\left[\frac{p_\theta}{mr^2}-\omega(1+\cos)\right]^2-\omega^2(1+\cos\theta)\right\} \tag{3}$$

由哈密顿正则方程

$$\begin{cases} \dot{p}_\theta = -\dfrac{\partial H}{\partial \theta} \\ \dot{\theta} = \dfrac{\partial H}{\partial p_\theta} \end{cases}$$

得 $\dot{p}_\theta = -mr^2\{[\frac{p_\theta}{mr^2} - \omega(1+\cos\theta)]\omega\sin\theta + \omega^2\sin\theta\}$

$$= -p_\theta\omega\sin\theta + mr^2\omega^2\sin\theta\cos\theta \qquad (4)$$

$$\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2} - \omega(1+\cos\theta) \qquad (5)$$

将（5）式对 t 求导后代入（4）式便得

$$\ddot{\theta} = -\frac{p_\theta}{mr^2}\omega\sin\theta + \omega^2\sin\theta\cos\theta + \omega\sin\theta\,\dot{\theta} \qquad (6)$$

把（5）式代入（6）式又得

$$\ddot{\theta} = -\frac{p_\theta\omega\sin\theta}{mr^2} + \omega^2\sin\theta\cos\theta + \frac{p_\theta\omega\sin\theta}{mr^2} - \omega^2\sin\theta(1+\cos\theta) = -\omega^2\sin\theta$$

即 $\ddot{\theta} = -\omega^2\sin\theta \qquad (7$

由于 $\ddot{\theta} = \dot{\theta}\dfrac{d\dot{\theta}}{d\theta}$，故（7）式又可改写为

$$\dot{\theta}d\dot{\theta} = -\omega^2\sin\theta d\theta$$

因此 $\int_{\dot{\theta}_0}^{\dot{\theta}} \dot{\theta}\, d\dot{\theta} = \int_{\theta_0}^{\theta} -\omega^2\sin\theta d\theta$

故有 $\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}\dot{\theta}_0^2 = \omega^2(\cos\theta - \cos\theta\ )$

或者 $r^2\dot{\theta}^2 - r^2\dot{\theta}_0^2 = 2r^2\omega^2(\cos\theta - \cos\theta_0)$

即 $V_r^2 - V_{r0}^2 = 2r^2\omega^2(\cos\theta - \cos\theta_0)$

所以，$V_r = \sqrt{V_{r0}^2 + 2r^2\omega^2(\cos\theta - \cos\theta_0)}$

例14 一质量为 m 之质点，受重力的作用在旋转抛物面 $x^2+y^2=az$ 之内表面上运动。假设无摩擦，试用哈密顿正则方程求其运动微分方程。

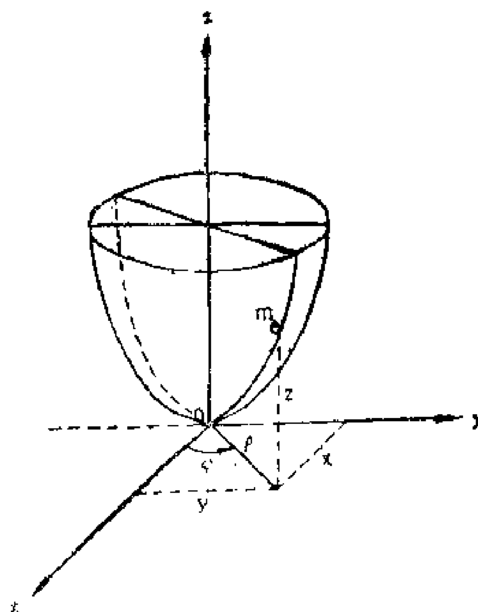


图3.14

解：由于质点具有两个自由度，故选 ρ，φ 为相应的广义坐标，如图 3.14 所示。于是，质点的动能可表示为

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2)$$

但由题给条件得

$$x^2 + y^2 = az$$

即 $\rho^2 = az$

故有 $\dot{z} = \dfrac{2\rho}{a}\dot{\rho}$

因而，上述动能表达式又可改写为

$$T = \frac{1}{2}m\left[\left(1+\frac{4\rho^2}{a^2}\right)\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2\right] \tag{1}$$

若选xoy平面为势能的参考面时，那么质点的势能为

$$V = mgz = mg\cdot\frac{\rho^2}{a} \tag{2}$$

于是，质点的拉格朗日函数为

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\left[\left(1+\frac{4\rho^2}{a^2}\right)\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2\right] - mg\frac{\rho^2}{a} \tag{3}$$

由广义动量的定义得

$$\begin{cases} p_\rho = \dfrac{\partial L}{\partial\dot{\rho}} = m\left(1+\dfrac{4\rho^2}{a^2}\right)\dot{\rho} \\ p_\varphi = \dfrac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = m\rho^2\dot{\varphi} \end{cases}$$

故有
$$\begin{cases} \dot{\rho} = \dfrac{p_\rho}{m\left(1+\dfrac{4\rho^2}{a^2}\right)} \\ \dot{\varphi} = \dfrac{p_\varphi}{m\rho^2} \end{cases}$$

所以，质点的哈密顿函数可表示为

$$H = \left[\sum_{i=1}^{2} p_i\dot{q}_i - L\right]_{\dot{q}_i \to p_i}$$

$$= \frac{p_\rho^2}{m\left(1+\dfrac{4\rho^2}{a^2}\right)} + \frac{p_\varphi^2}{m\rho^2} - \frac{1}{2}m\left[\left(1+\frac{4\rho^2}{a^2}\right)\cdot\frac{p_\rho^2}{m^2\left(1+\dfrac{4\rho^2}{a^2}\right)^2} + \frac{\rho^2 p_\varphi^2}{m^2\rho^4}\right] +$$

$$+ \frac{mg\rho^2}{a} = \frac{1}{2m}\left[\frac{p_\rho^2}{1+\dfrac{4\rho^2}{a^2}} + \frac{p_\varphi^2}{\rho^2}\right] + \frac{mg\rho^2}{a} \tag{4}$$

由哈密顿正则方程

$q_1 = \rho$：
$$\begin{cases} \dot{p}_\rho = -\dfrac{\partial H}{\partial\rho} \\ \dot{\rho} = \dfrac{\partial H}{\partial p_\rho} \end{cases}$$

得

$$\begin{cases} \dot{p}_\rho = -\dfrac{4\rho p_\rho^2}{ma^2\left(1+\dfrac{4\rho^2}{a}\right)^2} + \dfrac{p_\varphi^2}{m\rho^3} - \dfrac{2mg\rho}{a} & (5) \\ \dot{\rho} = \dfrac{p_\rho}{m\left(1+\dfrac{4\rho^2}{a^2}\right)} & (6) \end{cases}$$

又由哈密顿正则方程

$$q_2=\varphi: \begin{cases} \dot{p}_\varphi = -\dfrac{\partial H}{\partial \varphi} \\ \dot{\varphi} = \dfrac{\partial H}{\partial p_\varphi} \end{cases}$$

得

$$\begin{cases} \dot{p}_\varphi = 0 & (7) \\ \dot{\varphi} = \dfrac{p_\varphi}{m\rho^2} & (8) \end{cases}$$

将（6）式对 t 求导得

$$m\left(1+\frac{4\rho^2}{a^2}\right)\ddot{\rho} + \frac{8m\rho\dot{\rho}^2}{a^2} = \dot{p}_\rho \qquad (9)$$

把（6）式与（8）式以及（9）式同时代入（5）式并经整理得

$$m\left(1+\frac{4\rho^2}{a^2}\right)\ddot{\rho} + \frac{4m}{a^2}\rho\dot{\rho}^2 - m\rho\dot{\varphi}^2 + \frac{2mg}{a}\rho = 0 \qquad (10)$$

将（8）式对 t 求导后代入（7）式得

$$\frac{d}{dt}(m\rho^2\dot{\varphi}) = 0 \qquad (11)$$

因此，

$$\begin{cases} m\left(1+\dfrac{4\rho^2}{a^2}\right)\ddot{\rho} + \dfrac{4m}{a^2}\rho\dot{\rho}^2 - m\rho\dot{\varphi}^2 + \dfrac{2mg}{a}\rho = 0 \\ \dfrac{d}{dt}(m\rho^2\dot{\varphi}) = 0 \end{cases}$$

为所求的质点的运动微分方程式。

习　题

1．试建立支在一个固定支座上，并仅受重力作用的对称陀螺的哈密顿函数。

（答：$H=\dfrac{1}{2J}\left[\dfrac{(p_\psi - p_\varphi\cos\theta)^2}{\sin^2\theta} + p_\theta^2\right] + \dfrac{p_\varphi^2}{2J_z} + mga\cos\theta$

其中J_z为陀螺对于对称轴的转动惯量；J 为陀螺对通过定点 o 并垂直于对称轴之轴的转动惯量，而 a 为陀螺重心到 o 点的距离。）

2．试应用哈密顿正则方程求物理摆的摆动周期。

（答：$\tau=2\pi\sqrt{\dfrac{J_0}{mga}}$，其中$J_0$为摆对转动轴的转动惯量，而 a 为摆的重心到此轴的距离。）

3．试应用哈密顿正则方程导出行星的运动微分方程。

（答：
$$\begin{cases} m(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)=-\dfrac{GmM}{r^2} \\ mr^2\dot{\theta}=\text{常数} \end{cases}$$
式中m为行星的质量，M为太阳的质量，G为万有引力系数）。

4．试应用哈密顿正则方程，解弹簧振子的振动问题。

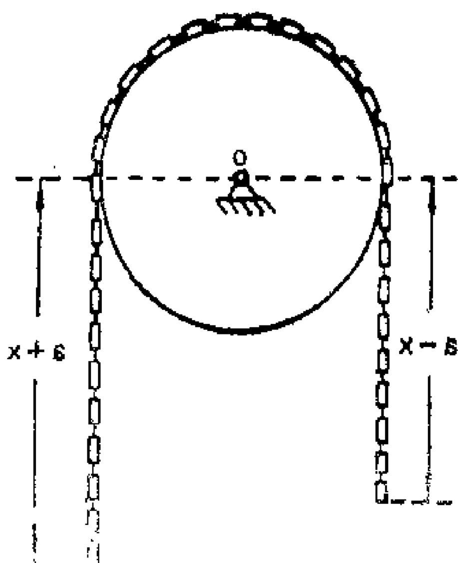
（答：　$x=A\sin(\sqrt{\dfrac{k}{m}}t+a)$，式中$k$为弹簧的刚性系数，$m$为振子的质量。而$a$为振子到平衡位置的距离。）

5．半径为r的滑轮上挂有长为$2a+\pi r$的均匀链条，链条单位长度的重量为μ，滑轮转动惯量为J_0，滑轮轴承没有摩擦，滑轮与链条之间没有滑动。开始时，两边悬空长度为$a-x_0$和$a+x$，初速为零，试用哈密顿正则方程求链条的运动方程（在一边悬空长度变为零以前）。

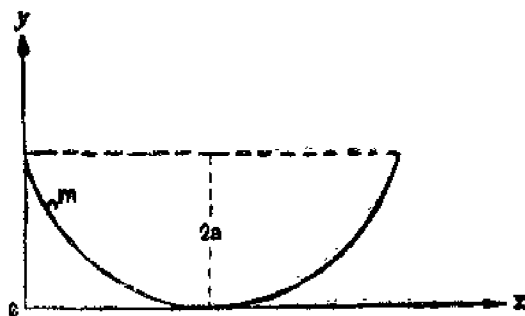
（答：　$x=x_0\text{ch}(kt)$，其中$\dfrac{1}{k^2}=\dfrac{J_0g+\pi\mu r^3}{2g\mu r^2}+\dfrac{a}{g}$）

6．一珠子无摩擦在一摆线形状之金属线上运动（见图示），摆线方程为
$$\begin{cases} x=a(\theta-\sin\theta) \\ y=a(1+\cos\theta) \end{cases}$$
式中　$0\leqslant\theta\leqslant2\pi$。试用哈密顿正则方程求珠子的运动微分方程。

（答：　$(1-\cos\theta)\ddot{\theta}+\dfrac{1}{2}\sin\theta\dot{\theta}^2-\dfrac{g}{2a}\sin\theta=0$）



题5图



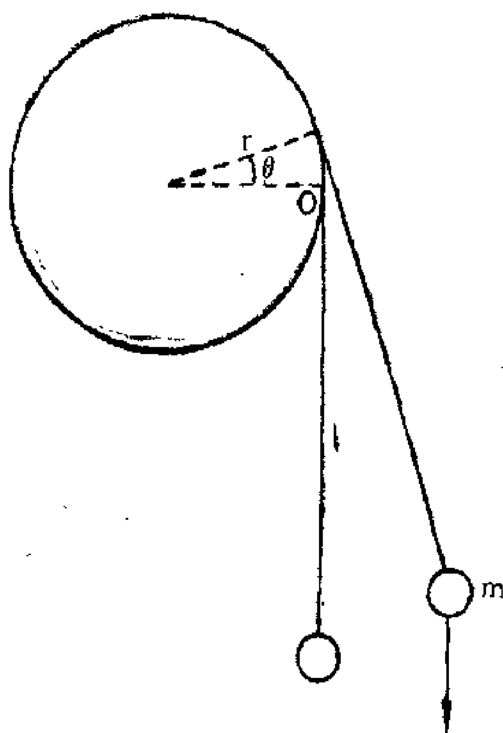
题6图

7．一质点的质量为m悬在一线上，线的另一端绕在一半径为r的固定圆柱上，构成一摆。设在平衡位置时，线的下垂部分长为l_0，且不计线的变形和质量。试用哈密顿正则方程求摆的运动微分方程。

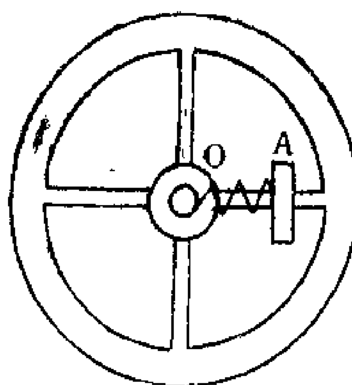
（答：　$(l_0+r\theta)\ddot{\theta}+r\dot{\theta}^2+g\sin\theta=0$）

8．飞轮在水平面内绕铅垂轴O转动，其转动惯量为J_0。轮辐上套一滑块A，其质量为m。以原长为l、刚性系数为k的弹簧将滑块与轴心相连。试用哈密顿正则方程列出体系以飞轮的转角θ和弹簧伸长x为广义坐标的运动微分方程。

（答：$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}\left\{[J_0+m(l+x)^2]\dot{\theta}\right\}=0\\ m\ddot{x}-m(l+x)\dot{\theta}^2+kx=0\end{cases}$）



题7图



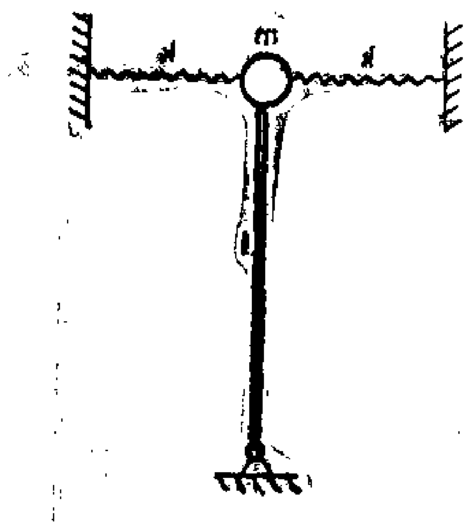
题8图

9．图示地震仪中的无定位摆，摆长为l，小球的质量为m，两个弹簧相同，且刚度系数均为k。平衡时两弹簧呈水平且保持原长。在运动时杆与弹簧保持在同一竖直面内，不计杆重。试用哈密顿正则方程求系统的微振动周期。设已知$2kl>mg$。

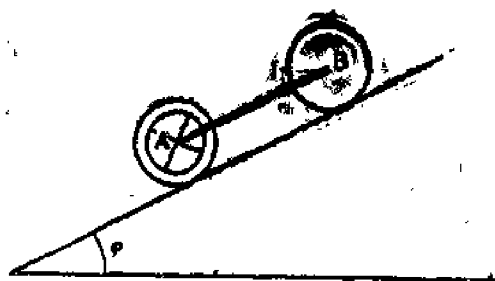
（答：$\tau=2\pi\sqrt{\dfrac{ml}{2kl-mg}}$）

10．均质园盘和园铁环（假定质量全部均匀地分布在环上）质量都是m，半径都是r，两者的中心用轻杆AB铰接。系统无滑动地沿倾角为φ的斜面滚下且保持在竖直平面内运动。试用哈密顿正则方程求杆AB的加速度a（如图，园盘在上面）。

（答：$a=\dfrac{4}{7}g\sin\varphi$）



题9图



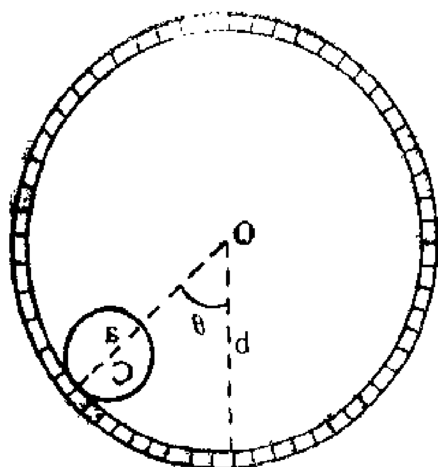
题10图

11．半径为b的均质空心园柱体能绕它的中心轴自由转动，中心轴水平安置，且园柱体以已知的变角速度$\omega(t)$转动。半径为$a(<b)$的均质实心小园柱体可在大园柱内无滑动地滚动。两柱的中心轴线平行，且两中心连线与向下的竖直轴夹角为θ。试用哈密顿正则方程证明下列方程成立。

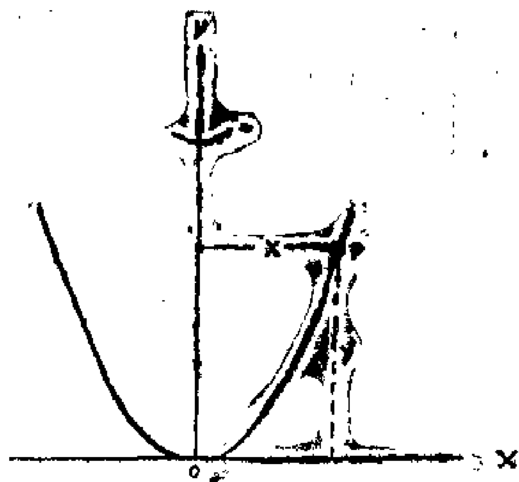
$$3(b-a)\ddot{\theta}=b\dot{\omega}-2g\sin\theta$$

12．轴为竖直而顶点在下的抛物线形金属丝，以匀角速ω绕轴转动。一质量为m的小环，套在此金属丝上，并可沿着金属丝滑动。试用哈密顿正则方程求小环在x方向的运动微分方程。已知抛物线的方程为$x^2=4ay$，式中a为一常数。

（答：$m\left(1+\frac{x^2}{4a^2}\right)\ddot{x}+m\frac{x}{4a^2}\dot{x}^2-m\omega^2x+mg\cdot\frac{x}{2a}=0$）



题11图



题12图

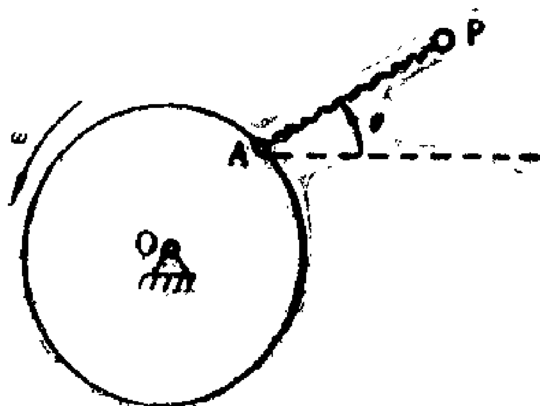
13．试用哈密顿正则方程求解 §2中的习题22。

14. 水平面上质量为m的质点P，由一弹簧与同一平面内的圆盘边缘上一点A相连，弹簧的原长为a，弹性系数为k。圆盘的半径为R，它以匀角速度ω绕过盘心O的竖直轴转动。不计摩擦和绳子的质量，求质点的运动微分方程。

（答：若选取弹簧长度和弹簧轴线与某一固定直线的夹角θ为广义坐标，则运动微分方程为

$$\begin{cases} m\ddot{r}-mr\dot{\theta}^2-mR\omega^2\cos(\varphi-\theta)+k(r-a)=0 \\ r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}-R\omega^2\sin(\varphi-\theta)=0 \end{cases}$$

其中$\varphi=\varphi_0+\omega t$是半径$OA$与固定直线的夹角。）



题14图

第四章　力学的变分原理

大家知道，在力学里有各种各样的定律与原理，本章要介绍的是四个力学的变分原理（即高斯最小约束原理、赫兹最小曲率原理、哈密顿原理与最小作用量原理）。为了弄清原理的含义，我们有必要对定律与原理分别加以说明。定律是通过对事物的现象进行观察、实验，在积累了大量观察事实或实验结果的基础上，经过归纳和概括而得到的基本规律（如牛顿三大定律等）。于是，定律直接来自实践，其正确性又直接由实践来检验。而原理，是由基本定律出发，经过演绎和推理所得到的带有根本性的命题。原理的正确性往往不容易从实践直接来检验，但可由它所得到的方程及方程的解和实践相比较来间接地检验其正确性。这里必须强调指出：原理所揭示出来的事物之间的本质联系往往要比基本定律更为深刻。

力学的变分原理是在基本定律的基础上采用变分的方法而得到的。它可分为两类：**（一）微分原理**：它研究在任一瞬间区分真实运动（或真实平衡状态）与在同样条件下的可能运动(或可能平衡状态)的准则。如虚功原理与达朗伯—拉格朗日原理以及高斯最小约束原理与赫兹最小曲率原理；**（二）积分原理**：它研究在任一有限时间历程中，区分真实运动与可能运动的准则。如最小作用量原理（1744年）与哈密顿原理(1835年)。力学的变分原理建立后，不仅已经成为力学领域研究的新起点，而且在理论物理发展的过程中得到广泛的应用。由于哈密顿原理与最小作用量原理是两个"最小化"原理，在数学方面涉及某泛函的极值问题（或称变分问题）。因此，首先要单地说明一下变分问题的概念与有关结论，而后才来介绍四个变分原理本身。

§4—1　变分法简介

一、变分的基本概念

1．等时变分

设有一个自由度的质点，它的位置决定于坐标

$$q=q(t)$$

将上式对时间 t 微分便得

$$dq=\dot{q}(t)dt$$

大家知道，微分 dq 是函数 q 由于自变量（即时间 t）的变化而引起的变化，因此，微分 dq 是同坐标 q 由于真实运动而引起的变化相符合。也即它表示了实位移。

如果我们改变函数 $q=q(t)$ 本身的形状而假定

$$\tilde{q}(t)=q(t)+\varepsilon\eta(t) \tag{4.1}$$

式中 ε 是任意小的常量，而 $\eta(t)$ 为任意可微的时间的函数，那么函数 $q(t)$ 由于其自身的形状的变化而引起的变化 δq 称之为等时变分。即

$$\delta q=\tilde{q}(t)-q(t)=\varepsilon\eta(t) \tag{4.2}$$

于是，每一时刻 t，对应一个 δq 值。它表示同一时刻 $\tilde{q}(t)$ 与 $q(t)$ 的差别。dq 与 δq 差别可从图4.1中看出。

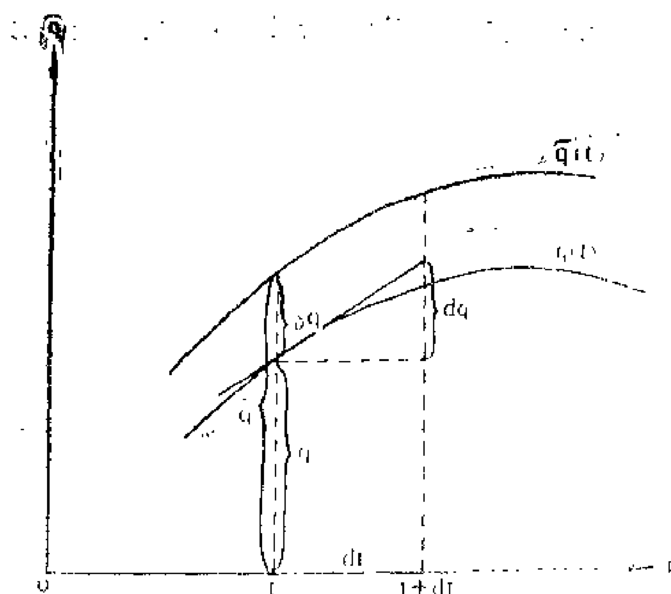


图4.1

下面介绍一下等时变分的性质：

1° 在等时变分下，时间是不变分的，亦即 $\delta t=0$。这是由于我们所研究的函数 $\tilde{q}(t)$ 与 $q(t)$的差别 δq 是在同一时刻的缘故。

2° 若函数 $q(t)$ 所表示的曲线具有两个固定端点A和B，则其端点的变分等于零。亦即

$$\delta q(A)=\delta q(B)=0 \tag{4.3}$$

显然，由图4.2可直接得出。

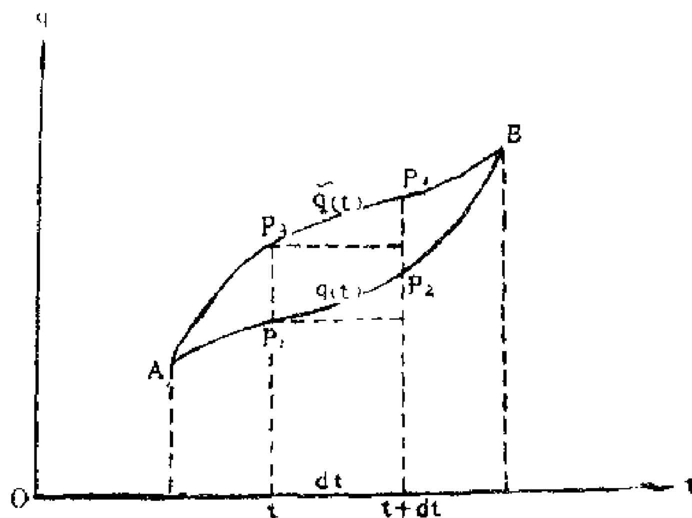


图4.2

3° 函数的微分运算和变分运算的顺序可以交换。即

$$\delta dq = d\delta q \tag{4.4}$$

为此，我们在曲线 $q(t)$ 上取任意二个无限邻近的点 P_1 与 P_2，在曲线 $q(t)$ 邻近的曲线 $\tilde{q}(t)$ 上相应地取两点 P_3 与 P_4，如图4.2所示。于是，它们的坐标分别为

$P_1(q,\ t)$

$P_2(q+dq,\ t+dt)$

$P_3(\tilde{q},\ t)$

$P_4(\tilde{q}+d\tilde{q},\ t+dt)$

由于 $\tilde{q}=q+\delta q$，所以 P_4 的坐标可表示为

$P_4[(q+\delta q)+d(q+\delta q),\ t+dt]$

另方面，$\overline{P_2P_4}$ 是函数 $q(t)$ 在 $t+dt$ 时刻，由于自身形状的变化而引起的变化，故有

$$\overline{P_2P_4}=\delta(q+dq)$$

因此，P_4 的坐标又可表示为

$P_4[(q+dq)+\delta(q+dq),\ t+dt]$

显然，P_4 点的坐标两种表示应该相同，亦即

$$q+\delta q+d(q+\delta q)=(q+dq)+\delta(q+dq)$$

展开上述式子便得

$$d\delta q=\delta dq$$

故得证。

4° 函数的等时变分和对时间的微商运算的次序可以交换，亦即

$$\frac{d}{dt}(\delta q)=\delta\left(\frac{dq}{dt}\right) \tag{4.5}$$

由于微分的运算法则可以用于变分的运算，所以

$$\delta\left(\frac{dq}{dt}\right)=\frac{(dt)\delta(dq)-dq\delta(dt)}{(dt)^2}$$

将等时变分的性质3°代入上式便得

$$\delta\left(\frac{dq}{dt}\right)=\frac{dt\cdot d(\delta q)-dq\cdot d(\delta t)}{(dt)^2}$$

$$=\frac{d}{dt}(\delta q)-\frac{dq}{dt}\cdot\frac{d}{dt}(\delta t)$$

由此可见，在一般的情况下

$$\delta\left(\frac{dq}{dt}\right)\neq\frac{d}{dt}(\delta q)$$

即函数的变分和对时间的微商运算的次序是不可交换的。但在等时变分的情况下，由于 $\delta t=0$ 故有

$$\delta\left(\frac{dq}{dt}\right)=\frac{d}{dt}(\delta q)$$

亦即，函数的等时变分和对时间的微商的运算的次序是可以交换的。

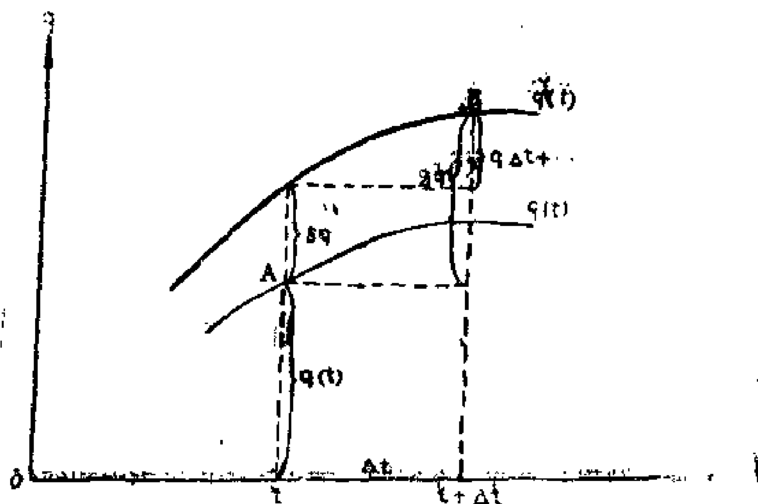


图4.3

2. 全变分

由于自变量时间 t 与函数 $q(t)$ 的本身形状同时发生变化所引起的函数 $q(t)$ 的变化 Δq 称之为全变分。即如图4.3所示，当从函数 $q(t)$ 曲线上的一点 A（t 时刻）过渡到邻近曲线 $\tilde{q}(t)$ 的 B 点（$t+\Delta t$ 时刻）时，那么函数 $q(t)$ 的全变分为

$$\Delta q=\tilde{q}(t+\Delta t)-q(t) \qquad (4.6)$$

由于 $\delta q=\tilde{q}(t)-q(t)$ 所以（4.6）式可表示为

$$\Delta q=\delta q+\tilde{q}(t+\Delta t)-\tilde{q}(t)$$

当 Δt 很小时，$\tilde{q}(t+\Delta t)-\tilde{q}(t)\doteq\dfrac{d\tilde{q}}{dt}\Delta t$

$$=(\dot{q}+\delta\dot{q})\Delta t$$

$$\doteq\dot{q}\Delta t$$

于是 $\Delta q=\delta q+\dot{q}\Delta t \qquad (4.7)$

全变分有一个很重要的性质就是：函数的全变分与对时间的微商的运算次序是不可以交换的。即

$$\frac{d}{dt}\Delta q\neq\Delta\frac{dq}{dt} \qquad (4.8)$$

我们只要把方程式（4.7）两边同时对时间求导便得

$$\frac{d}{dt}(\Delta q)=\delta\dot{q}+\ddot{q}\Delta t+\dot{q}\frac{d}{dt}(\Delta t) \qquad (4.9)$$

另方面，由函数的全变分的表达式（4.7）可得到函数 $\dot{q}$ 的全变分为

$$\Delta\dot{q}=\delta\dot{q}+\ddot{q}\Delta t \qquad (4.10)$$

把（4.10）式代入（4.9）式便得

$$\frac{d}{dt}(\Delta q)=\Delta\dot{q}+\dot{q}\frac{d}{dt}(\Delta t)$$

即

$$\frac{d}{dt}(\Delta q)=\Delta\left(\frac{dq}{dt}\right)+\dot{q}\frac{d}{dt}(\Delta t) \tag{4.11}$$

由此可见，$\frac{d}{dt}\Delta q\neq\Delta\frac{dq}{dt}$ 得证。

二、泛函的概念和变分法

下面我们从“最速落径问题”为例来介绍泛函的概念和变分法。

1. 最速落径问题

1696年约翰·伯努利提出这样一个问题：如果不考虑摩擦力和空气阻力的话，那么要在所有连接不在同一铅直线上的任意两个定点A和B（B点低于A点）的曲线中，确定出一条曲线来，使得无初速的质点在重力的作用下沿着这条曲线从A点滑到B点时所需的时间为最短。后来，经过莱布尼兹、牛顿、雅可俾、伯努利等人的努力，此问题才得到比较完善的解决。从而，创立了变分法。

选如图4.4所示的坐标系，原点在A点，ox轴沿水平方向（向右为正）。oz轴竖直向下。设质点M的速度为v，那么它沿着曲线走过ds路程所需的时间为

$$dt=\frac{ds}{v} \tag{4.12}$$

由题设得知，质点无初速地从A点滑到M点时，机械能守恒，故有

$$v=\sqrt{2gz}$$

由弧长公式得

$$ds=\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}dx$$
$$=\sqrt{1+z'^2}\,dx$$

式中$z'=\frac{dz}{dx}$，于是（4.12）式可写为

$$dt=\frac{\sqrt{1+z'^2}\,dx}{\sqrt{2gz}}$$

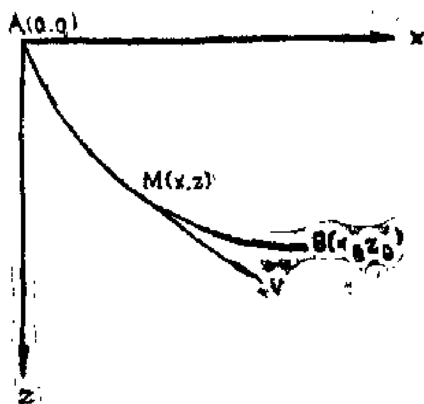


图4.4

积分上式便得到质点M沿着曲线AB从A点滑到B点时所需的时间

$$t[z(x)]=\int_0^{x_B}\frac{\sqrt{1+z'^2}}{\sqrt{2gz}}dx \tag{4.13}$$

上式表明，质点M沿着曲线AB从A点滑到B点所需的时间t是与函数$z(x)$的形状有关，亦即t与质点M所选取的运动曲线有关。诸如此类，可以在一定范围内变化的函数［如此例中的$z(x)$］称为自变函数，而依赖于这些自变函数的可变函数的量（如此例

中的时间 t ）称为该自变函数的泛函数，或简称为泛函。因此，最速落径的问题，实质上是求泛函 $t[z(x)]$ 的极值问题。凡有关求泛函的极值问题均称为变分问题。而变分法就是研究在各种不同边界条件和约束条件下各种泛函极值的必要条件和充分条件的普遍方法。

2. 欧勒方程：

由于泛函与函数十分类似，只不过函数所依赖的自变量是数，而泛函所依赖的自变量是函数。因此，泛函中的极值理论也非常类似于函数中的极值理论。只不过是函数中所用的是微分，而泛函中所采用的是变分。变分在泛函的研究中所起的作用正如微分在函数的研究中所起的作用。

泛函极值的定义：如果泛函 $J[z(x)]$ 在任何一条与 $z(x)=z_0(x)$ 接近的曲线，亦即比较曲线 $\tilde{z}(x)=z_0(x)+\varepsilon\zeta(x)$ 上的值 $J[\tilde{z}(x)]$ 不大于 $J[z_0(x)]$，也就是说如果 $J[\tilde{z}(x)]<J[z_0(x)]$ 时，那么就称泛函 $J[z(x)]$ 在曲线 $z(x)=z_0(x)$ 上达到极大值。同样，如果泛函 $J[z(x)]$ 在任何一条与 $z(x)=z_0(x)$ 接近的曲线，亦即比较曲线 $\tilde{z}(x)=z_0(x)+\varepsilon\zeta(x)$ 上的值 $J[\tilde{z}(x)]$ 大于 $J[z_0(x)]$，也就是说，如果 $J[\tilde{z}(x)]>J[z_0(x)]$ 时，那么就称泛函 $J[z(x)]$ 在曲线 $z(x)=z_0(x)$ 上达到极小值。

泛函极值的必要条件：如果具有变分的泛函 $J[z(x)]$ 在曲线 $z(x)=z_0(x)$ 上达到极值，那么在这曲线 $z(x)=z_0(x)$ 上有

$$\delta J=0 \tag{4.14}$$

现在，我们来研究最简单的泛函

$$J[z(x)]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,\ z,\ z')dx \tag{4.15}$$

的极值的必要条件。

将（4.15）式取等时变分，并考虑到 $\delta x=0$ 的情况，即得

$$\delta J=\delta\int_{x_0}^{x_1}F(x,\ z,\ z')dx$$

$$=\int_{x_0}^{x_1}\delta F(x,\ z,\ z')dx$$

$$=\int_{x_0}^{x_1}\left(\frac{\partial F}{\partial z}\delta z+\frac{\partial F}{\partial z'}\delta z'\right)dx$$

$$=\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial F}{\partial z}\delta z dx+\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial F}{\partial z'}d(\delta z)$$

$$=\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial F}{\partial z}\delta z dx+\left[\frac{\partial F}{\partial z'}\delta z\right]_{x_0}^{x_1}-\int_{x_0}^{x_1}\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right)\delta z dx$$

$$=\int_{x_0}^{x_1}\left[\frac{\partial F}{\partial z}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right)\right]\delta z dx+\left[\frac{\partial F}{\partial z'}\delta z\right]_{x_0}^{x_1}$$

由于函数 $z(x)$ 在两端固定不变，即在 $x=x_0$ 及 $x=x_1$ 处

$$\delta z(x_0)=\tilde{z}(x_0)-z(x_0)=0$$

和 $$\delta z(x_1)=\tilde{z}(x_1)-z(x_1)=0$$

故有 $$\delta J=\int_{x_0}^{x_1}\left[\frac{\partial F}{\partial z}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right)\right]\delta z dx$$

于是，（4.14）式就可表示为

$$\int_{x_0}^{x_1}\left[\frac{\partial F}{\partial z}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right)\right]\delta z dx=0$$

由于积分的范围是任意的，同时 $\delta z=\varepsilon\zeta(x)$ 也是任意的，且在积分的上下限上的数值等于零，故得上式积分的被积函数等于零。即

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right)-\frac{\partial F}{\partial z}=0 \tag{4.16}$$

（4.16）式就是泛函（4.15）式的极值的必要条件。也就是说，使泛函取极值的 $z(x)$ 必须满足此方程。由于它是欧勒于1744年首先推导得出的，因此称之为**欧勒方程**。如果 F 为已知，只要将（4.16）方程式积分，结合边界条件便可求出极值曲线 $z(x, c_1, c_2)$。于是，求泛函数的极值问题便归结为求欧勒方程的积分问题。

若泛函具有 n 个自变函数 $z_i(x)$（$i=1, 2, \cdots, n$）时，亦即

$$J[z_i(x)]=\int_{x_0}^{x_1}F(x, z_i, z_i')dx \quad (i=1, 2, \cdots, n) \tag{4.17}$$

而且各函数的边界值为已知

$$\left.\begin{aligned}z_i(x_0)&=z_{i0}\\z_i(x_1)&=z_{i1}\end{aligned}\right\}\quad (i=1, 2, \cdots\cdots, n) \tag{4.18}$$

为了得到这个泛函极值的必要条件，我们可以只使 n 个自变函数中一个 $z_i(x)$ 获得变分，而使其余各函数均保持不变，这时泛函转变为一个只依赖于 $z_i(x)$ 的泛函。因而，极值的函数应满足欧勒方程（4.16）。这一推理适用于 n 个自变函数中的任何一个。于是，便得到 n 个二阶微分方程

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial z_i'}\right)-\frac{\partial F}{\partial z_i}=0 \quad (i=1, 2, \cdots\cdots, n) \tag{4.19}$$

结合边界条件（4.18）式，便可确定一族 $z_i(x, c_1, c_2, \cdots c_{2n})$ 的积分曲线，也即变分问题的极值曲线。

现在，让我们利用欧勒方程（4.16）式，来求出（4.13）式泛函 $t[z(x)]$ 的极值（即最速的落径）。

由于此时

$$F=\frac{\sqrt{1+z'^2}}{\sqrt{2gz}}$$

其边界条件为

$$z(0)=0\,,\qquad z(x_B)=z_B$$

所以，欧勒方程变为

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{\sqrt{1+z'^2}}{\sqrt{2gz}}\right)\right]-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\sqrt{1+z'^2}}{\sqrt{2gz}}\right)=0 \tag{4.20}$$

以 z' 乘上述方程各项得

$$\left\{\frac{d}{dx}\left[\frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{\sqrt{1+z'^2}}{\sqrt{2gz}}\right)\right]\right\}z'-\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\sqrt{1+z'^2}}{\sqrt{2gz}}\right)\right]z'=0$$

亦即

$$\frac{d}{dx}\left\{\left[\frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{\sqrt{1+z'^2}}{\sqrt{2gz}}\right)\right]z'\right\}-\left[\frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{\sqrt{1+z'^2}}{\sqrt{2gz}}\right)\right]z''-\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\sqrt{1+z'^2}}{\sqrt{2gz}}\right)\right]z'=0$$

或者

$$\frac{d}{dx}\left\{\left[\frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{\sqrt{1+z'^2}}{\sqrt{2gz}}\right)\right]z'\right\}-\left\{\left[\frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{\sqrt{1+z'^2}}{\sqrt{2gz}}\right)\right]z''+\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\sqrt{1+z'^2}}{\sqrt{2gz}}\right)\right]z'\right\}=0 \tag{4.21}$$

由于 $\frac{d}{dx}\left(\frac{\sqrt{1+z'^2}}{\sqrt{2gz}}\right)=\left[\frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{\sqrt{1+z'^2}}{\sqrt{2gz}}\right)\right]z''+\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\sqrt{1+z'^2}}{\sqrt{2gz}}\right)\right]z'$

故上述（4.21）方程又可表示为

$$\frac{d}{dx}\left\{\left[\frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{\sqrt{1+z'^2}}{\sqrt{2gz}}\right)\right]z'-\frac{\sqrt{1+z'^2}}{\sqrt{2gz}}\right\}=0$$

因此可得

$$\left[\frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{\sqrt{1+z'^2}}{\sqrt{2gz}}\right)\right]z'-\frac{\sqrt{1+z'^2}}{\sqrt{2gz}}=\text{常数}$$

展开上式便有

$$\frac{1}{\sqrt{2gz}}\cdot\frac{z'^2}{\sqrt{1+z'^2}}-\frac{\sqrt{1+z'^2}}{\sqrt{2gz}}=\text{常数}$$

亦即 $\frac{z'^2}{\sqrt{z(1+z'^2)}}-\frac{\sqrt{1+z'^2}}{\sqrt{z}}=\text{常数}$

简化上式又可得

$$\frac{1}{\sqrt{z(1+z'^2)}}=\text{常数}$$

于是 $z(1+z'^2)=C$

或者 $z'=\sqrt{\frac{C-z}{z}}$ （4,22）

式中 C 为积分常数。

若设 $z=C\sin^2\frac{\varphi}{2}=\frac{C}{2}(1-\cos\varphi)$ （4.23）

那么 $dz=C\sin\frac{\varphi}{2}\cdot\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi$

把 z 与 dz 的表达式同时代入（4.22）式并经整理得

$$dx=C\sin^2\frac{\varphi}{2}d\varphi=\frac{C}{2}(1-\cos\varphi)d\varphi$$

于是 $\int dx=\int\frac{C}{2}(1-\cos\varphi)d\varphi$

即得 $x=\frac{C}{2}(\varphi-\sin\varphi)+C_1$ （4.24）

由于 $t=0$ 时，$x=0$，$z=0$（即从 A 点开始），所以联立（4.23）与（4.24）式便可解得 $C_1=0$，因此，最速落径的参数方程为

$$\begin{cases} x=\frac{C}{2}(\varphi-\sin\varphi) \\ z=\frac{C}{2}(1-\cos\varphi) \end{cases} \quad (4.25)$$

此方程为旋轮线的参数方程，$\frac{C}{2}$ 为旋轮的半径（如图4.5所示）。它可由曲线需通过已知点 B（x_B，z_B）这一条件来确定。由此可见，在重力作用下质点沿通过已知两点的旋轮线自由下滑时所需的时间为最短。

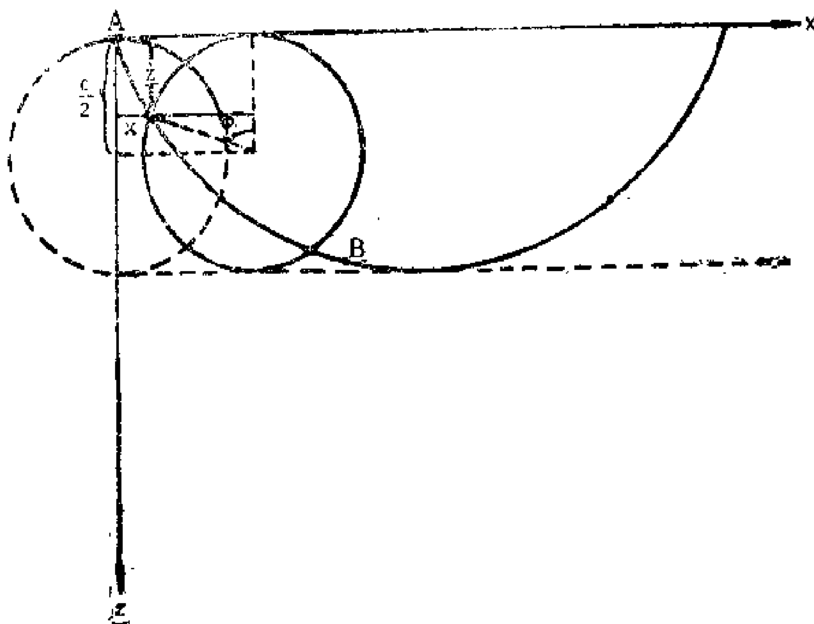


图4.5

§4—2 微 分 原 理

一、高斯最小约束原理

1. 高斯最小约束原理的表述

质点组在理想约束条件下，对于同一初位形与初速度的所有由不同的加速度所表示的可能运动中，其真实运动是使“约束”取极小值。亦即

$$\delta D = 0 \tag{4.26}$$

式中 $$D=\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2}m_k\left(\ddot{\mathbf{r}}_k-\frac{\mathbf{F}_k}{m_k}\right)^2 \tag{4.27}$$

称为“约束”。

2. 从达朗伯—拉格朗日方程推导高斯最小约束原理

设所研究的质点组是由N个质点所组成，质点m_k在时间t时在位置M_k上，经很短的时间τ，若没有力的作用，它将以t时所具有的速度$\mathbf{v}_k$运动到A_k，得位移$\mathbf{v}_k\cdot\tau$，如图4.6所示。由于有主动力$\mathbf{F}_k$的作用，质点m_k经过时间τ后运动到B_k位置，其位移为

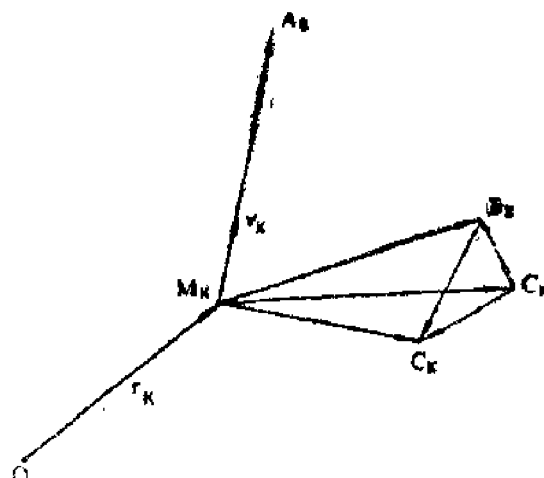


图4.6

$$\mathbf{M}_k\mathbf{B}_k=\mathbf{v}_k\cdot\tau+\frac{1}{2}\cdot\frac{\mathbf{F}_k}{m_k}\tau^2+\cdots \tag{4.28}$$

但由于尚有约束力$\mathbf{N}_k$的作用，真实位移应为

$$\mathbf{M}_k\mathbf{C}_k=\mathbf{v}_k\cdot\tau+\frac{1}{2}\ddot{\mathbf{r}}_k\tau^2+\cdots \tag{4.29}$$

式中$\ddot{\mathbf{r}}_k$是质点m_k的加速度。将上述（4.28）式与（4.29）式相减并略去三阶的微量便得

$$\mathbf{B}_k\mathbf{C}_k=\mathbf{M}_k\mathbf{C}_k-\mathbf{M}_k\mathbf{B}_k=\frac{1}{2}\tau^2\left(\ddot{\mathbf{r}}_k-\frac{\mathbf{F}_k}{m_k}\right) \tag{4.30}$$

由于 $$\mathbf{N}_k+\mathbf{F}_k=m_k\ddot{\mathbf{r}}_k \tag{4.31}$$

所以 $$D=\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2}m_k\left(\ddot{\mathbf{r}}_k-\frac{\mathbf{F}_k}{m_k}\right)^2$$

$$=\frac{2}{\tau^4}\sum_{k=1}^{N}m_k(\mathbf{B}_k\mathbf{C}_k)^2$$

$$=\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2}m_k\left(\frac{\mathbf{N}_k}{m_k}\right)^2$$

$$=\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2}\cdot\frac{\mathbf{N}_k^2}{m_k} \tag{4.32}$$

因此，1829年数学家高斯定义D为"约束"，作为质点组在约束条件下，可能运动对自由运动的偏离的度量。

现又假设$\mathbf{M}_k\mathbf{C}'_k$是质点$m_k$在约束许可下的虚位移（如图4.6所示），那么

$$\mathbf{B}_k\mathbf{C}'_k=\mathbf{B}_k\mathbf{C}_k+\mathbf{C}_k\mathbf{C}'_k \tag{4.33}$$

将上述式子两端平方得

$$(\mathbf{B}_k\mathbf{C}'_k)^2=(\mathbf{B}_k\mathbf{C}_k)^2+(\mathbf{C}_k\mathbf{C}'_k)^2+2\mathbf{B}_k\mathbf{C}_k\cdot\mathbf{C}_k\mathbf{C}'_k \tag{4.34}$$

于是，对虚位移的D'有

$$D'=\frac{2}{\tau^4}\sum_{k=1}^{N}m_k(\mathbf{B}_k\mathbf{C}'_k)^2$$

$$=\frac{2}{\tau^4}\sum_{k=1}^{N}m_k[(\mathbf{B}_k\mathbf{C}_k)^2+(\mathbf{C}_k\mathbf{C}'_k)^2]+\frac{4}{\tau^4}\sum_{k=1}^{N}m_k\mathbf{B}_k\mathbf{C}_k\cdot\mathbf{C}_k\mathbf{C}'_k$$

$$=D+\frac{2}{\tau^4}\sum_{k=1}^{N}m_k(\mathbf{C}_k\mathbf{C}'_k)^2+\frac{4}{\tau^4}\sum_{k=1}^{N}m_k\mathbf{B}_k\mathbf{C}_k\cdot\mathbf{C}_k\mathbf{C}'_k \tag{4.35}$$

由于 $\mathbf{C}_k\mathbf{C}'_k=\delta\mathbf{r}_k$ 且考虑到 $\mathbf{B}_k\mathbf{C}_k=\frac{1}{2}\tau^2\left(\ddot{\mathbf{r}}_k-\frac{\mathbf{F}_k}{m_k}\right)$

所以 $$\sum_{k=1}^{N}m_k\mathbf{B}_k\mathbf{C}_k\cdot\mathbf{C}_k\mathbf{C}'_k=\frac{\tau^2}{2}\sum_{k=1}^{N}m_k\left(\ddot{\mathbf{r}}_k-\frac{\mathbf{F}_k}{m_k}\right)\cdot\delta\mathbf{r}_k$$

$$=\frac{\tau^2}{2}\sum_{k=1}^{N}(m_k\ddot{\mathbf{r}}_k-\mathbf{F}_k)\cdot\delta\mathbf{r}_k \tag{4.36}$$

因此，由达朗伯一拉格朗日方程

$$\sum_{k=1}^{N}(\mathbf{F}_k-m_k\ddot{\mathbf{r}}_k)\cdot\delta\mathbf{r}_k=0$$

得 $$\sum_{k=1}^{N}m_k\mathbf{B}_k\mathbf{C}_k\cdot\mathbf{C}_k\mathbf{C}'_k=0$$

故 $$D'=D+\frac{2}{\tau^4}\sum_{k=1}^{N}m_k(\mathbf{C}_k\mathbf{C}'_k)^2 \tag{4.37}$$

由此可见 $D'>D$（因为 $\frac{2}{\tau^4}\sum_{k=1}^{N}m_k(\mathbf{C}_k\mathbf{C}_k')^2>0$）　　　　(4.38)

亦即，对真实运动而言，"约束"具有极小值。

高斯最小约束原理的物理意义可用下列简单的例子来加以说明。设重质点M没有初速地沿着斜面MBC运动（如图4.7所示），那么M点真实位移的方向将沿着斜度最大的直线MA，而现时可能的位移将为MB、MC等等。质点M自由位移的方向将沿着铅垂线MO。十分明显，真实位移对自由位移的偏离OA小于可能位移的偏离OB、OC等等。下面我们举一个例子来说明高斯最小约束原理的具体应用。

设三棱柱A沿三棱柱B的光滑斜面滑动，A和B各重为P和Q，三棱柱B的斜面与水平面成α角，如图4.8所示。若开始时物系静止，试求三棱柱B的加速度。摩擦可略去不计。

解：设三棱柱B的加速度为$\mathbf{a}_B$，三棱柱A相对于B的加速度为$\mathbf{a}_{rA}$。于是，系统的"约束"D可表示为

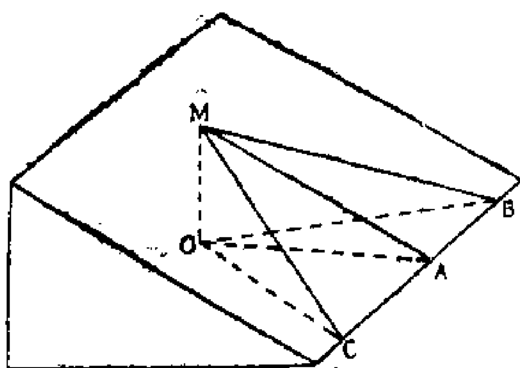


图4.7

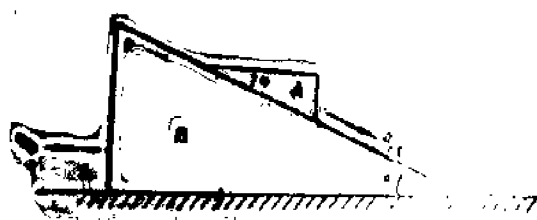


图4.8

$$D=\frac{1}{2}\{Ma_B^2+m[(a_{rA}\cos\alpha-a_B)^2+(a_{rA}\sin\alpha-g)^2]\}$$

$$=\frac{1}{2g}\{Qa_B^2+P[(a_{rA}\cos\alpha-a_B)^2+(a_{rA}\sin\alpha-g)^2]\}$$

故有
$$\frac{\partial D}{\partial a_B}=\frac{Q}{g}a_B-\frac{P}{g}(a_{rA}\cos\alpha-a_B)$$

$$\frac{\partial D}{\partial a_{rA}}=\frac{P}{g}[(a_{rA}\cos\alpha-a_B)\cos\alpha+(a_{rA}\sin\alpha-g)\sin\alpha]$$

由最小约束原理

$$\delta D=0\quad 即\quad \frac{\partial D}{\partial a_B}\delta a_B+\frac{\partial D}{\partial a_{rA}}\delta a_{rA}=0$$

得
$$\frac{1}{g}[Qa_B-P(a_{rA}\cos\alpha-a_B)]\delta a_B+\frac{P}{g}[(a_{rA}\cos\alpha-a_B)\cos\alpha+$$

$$+(a_{rA}\sin\alpha-g)\sin\alpha]\delta a_{rA}=0$$

由于δa_B，δa_{rA}为彼此独立且任意的，故有

$$\begin{cases} Qa_B - P(a_{rA}\cos\alpha - a_B) = 0 & (1) \\ (a_{rA}\cos\alpha - a_B)\cos\alpha + (a_{rA}\sin\alpha - g)\sin\alpha = 0 & (2) \end{cases}$$

化（1）式得

$$\therefore \quad a_B = \frac{P\cos\alpha}{Q+P} a_{rA} \qquad (3)$$

将（3）式代入（2）式得

$$\left(a_{rA}\cos\alpha - \frac{P\cos\alpha}{Q+P} a_{rA}\right)\cos\alpha + (a_{rA}\sin\alpha - g)\sin\alpha = 0$$

即 $\left[\left(1 - \frac{P}{Q+P}\right)\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\right] a_{rA} = g\sin\alpha$

或者 $\frac{Q+P\sin^2\alpha}{Q+P} a_{rA} = g\sin\alpha$

故有 $a_{rA} = \frac{(Q+P)\sin\alpha}{Q+P\sin^2\alpha} \cdot g \qquad (4)$

把（4）式代入（3）式得

$$a_B = \frac{P\cos\alpha}{Q+P} \cdot \frac{(Q+P)\sin\alpha}{Q+P\sin^2\alpha} g = \frac{g}{2} \cdot \frac{P\sin 2\alpha}{Q+P\sin^2\alpha}$$

二、赫兹最小曲率原理

1. 赫兹最小曲率原理的表述

质点组在稳定约束且不受力的作用的条件下，对于约束所容许的所有的可能运动中，唯有真实的运动具有恒定的速度与轨道最小的曲率。即

$$\dot{s} = 常数 \quad 与 \quad \delta k = 0 \qquad (4.39)$$

式中 $\dot{s} = \frac{ds}{dt}$ 称为质点组的速度，k 称为质点组轨道的曲率。

2. 从高斯最小约束原理推导赫兹最小曲率原理

设我们所研究的质点组是由 N 个质点所组成，其坐标以 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{3N}$ 表示之。若将质点组运动的轨道定义为 $3N$ 维空间中的曲线，那么此曲线的弧元为

$$ds^2 = \frac{1}{M}\sum_{r=1}^{N} m_r ds_r^2 = \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{3N} m_j d\xi_j^2 = \sum_{j=1}^{3N} dx_j^2 \qquad (4.40)$$

式中 $x_j = \sqrt{\frac{m_j}{M}}\xi_j, \quad M = \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{3N} m_j = \sum_{r=1}^{N} m_r$

M 称为质点组的质量，而量 $\frac{ds}{dt} = \sqrt{\sum_{j=1}^{3N} \dot{x}_j^2}$ 称为质点组的速度。

由于在三维空间中曲线的曲率 k 可表示为

$$k^2=\frac{1}{\rho^2}=\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{d^2x_i}{ds^2}\right)^2$$

所以在 3N 维空间中曲线的曲率 k 便可表示为

$$k^2=\sum_{i=1}^{3N}\left(\frac{d^2x_i}{ds^2}\right)^2 \tag{4.41}$$

若没有主动力时，那么高斯“约束”便可表示为

$$D=\sum_{i=1}^{3N}\frac{1}{2}m_i\ddot{\xi}_i^2=\frac{1}{2}M\sum_{i=1}^{3N}\ddot{x}_i^2 \tag{4.42}$$

因为 $\dot{x}_i=\frac{dx_i}{ds}\dot{s}$　$\ddot{x}_i=\frac{d^2x_i}{ds^2}\dot{s}^2+\frac{dx_i}{ds}\ddot{s}$

所以 $$\ddot{x}_i^2=\left(\frac{d^2x_i}{ds^2}\right)^2\dot{s}^4+2\frac{d^2x_i}{ds^2}\cdot\frac{dx_i}{ds}\dot{s}^2\ddot{s}+\left(\frac{dx_i}{ds}\right)^2\ddot{s}^2 \tag{4.43}$$

将(4.43)式代入(4.42)式便得

$$D=\frac{1}{2}M\left[\sum_{i=1}^{3N}\left(\frac{d^2x_i}{ds^2}\right)^2\dot{s}^4+2\sum_{i=1}^{3N}\frac{d^2x_i}{ds^2}\cdot\frac{dx_i}{ds}\dot{s}^2\ddot{s}+\sum_{i=1}^{3N}\left(\frac{dx_i}{ds}\right)^2\ddot{s}^2\right] \tag{4.44}$$

但从等式(4.40)得到

$$\sum_{i=1}^{3N}\left(\frac{dx_i}{ds}\right)^2=1 \tag{4.45}$$

将上述式子对 s 微分便有

$$\sum_{i=1}^{3N}\frac{dx_i}{ds}\cdot\frac{d^2x_i}{ds^2}=0 \tag{4.46}$$

于是把(4.41)式与(4.45)式以及(4.46)式同时代入(4.44)式即得

$$D=\frac{1}{2}M[k^2\dot{s}^4+\ddot{s}^2] \tag{4.47}$$

由于没有主动力，所以在具有稳定约束的情况下，质点组的动能为常数，即

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3N}m_i\dot{\xi}_i^2=\frac{1}{2}M\sum_{i=1}^{3N}\dot{x}_i^2=\frac{1}{2}M\dot{s}^2=\text{常数}$$

因而　$\dot{s}=$常数，或者 $\ddot{s}=0$ 故有

$$D=\frac{1}{2}Mk^2\dot{s}^4 \tag{4.48}$$

于是　$\delta D=M\dot{s}^4k\delta k$

由此可见，$\delta D=0$ 时，$\delta k=0$，亦即当 D 为极小值时，k 也为极小。

§4-3 积分原理

一．哈密顿原理

哈密顿原理是经典力学中另一个原理，可以与牛顿定律或动力学的普遍方程相平行作为经典力学的另一个新起点．它是在1834—1835年期间由哈密顿提出的．

1．哈密顿原理的表述

1°完整保守质点组的哈密顿原理：若所研究的质点组是由N个质点所组成，受m个完整约束，具有n个自由度，相应的广义坐标为$q_1, q_2, \cdots, q_n$，且所受的主动力是具有势时，那么质点组在相同的约束条件下，从状态A到状态B的真实运动与同时从A状态开始，同始到达B状态的其他一切可能运动中，唯有真实运动的哈密顿作用量具有极值．即

$$\delta S=0 \tag{4.49}$$

式中

$$S=\int_{t_0}^{t_1} L(q_i, \dot{q}_i, t)dt \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{4.50}$$

称为**哈密顿作用量**．它是$q_1, q_2, \cdots, q_n$的泛函．t_0为A状态的相应时刻，t_1为B状态的相应时刻．因此，哈密顿原理给出一个准则，以便在一切可能运动（约束许可的邻近运动）中，将真实运动区分开来．

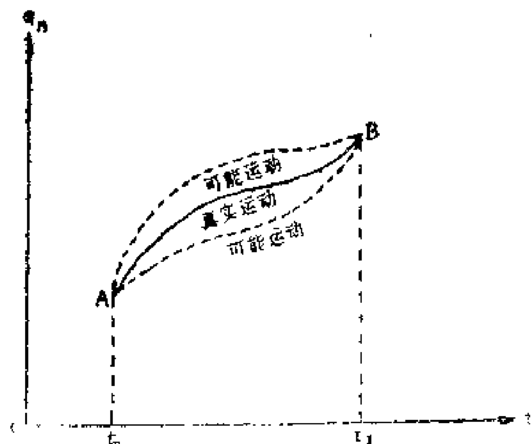


图4.9

2°非有势力的完整质点组的哈密顿原理：若所研究的质点组是由N个质点所组成，受m个完整约束，具有n个自由度，相应的广义坐标为$q_1, q_2, \cdots, q_n$．所受的主动力中包含部份有势力和部份非有势力时，那么哈密顿原理的数学表达式为

$$\delta S+\int_{t_0}^{t_1}\left(\sum_{i=1}^{n} Q_i^* \delta q_i\right)dt=0 \tag{4.51}$$

式中 S 仍然为哈密顿作用量，Q_j^* 是非有势力所对应的广义力，被积函数是非有势力所作的虚功。

2. 哈密顿原理的推导

1°从拉格朗日方程导出哈密顿原理

由于 $$L=L(q_i,\dot{q}_i,t)$$

所以 $$\delta L=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i\right)+\frac{\partial L}{\partial t}\delta t$$

考虑到等时变分 $\delta t=0$，故上述式子可表示为

$$\delta L=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i\right)$$

因为我们所研究的质点组是在两个状态 $A(t=t_0$ 时）和 $B(t=t_1$ 时）之间的运动，所以对上式从 t_0 到 t_1 积分得

$$\int_{t_1}^{t_1}\delta L dt=\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i\right)dt$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i dt+\sum_{i=1}^{n}\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}d(\delta q_i)$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i dt+\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right]_{t_0}^{t_1}-$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\int_{t_0}^{t_1}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i dt \qquad (4.52)$$

由于 A、B 点是固定的，所以

$$\delta q_i(t_0)=0,\ \ \delta q_i(t_1)=0$$

因此，(4.52) 式又可表为

$$\int_{t_0}^{t_1}\delta L dt=\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\right]\delta q_i dt \qquad (4.53)$$

将拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0\quad (i=1,2,\cdots,n)$$

代入上述 (4.53) 式便得

$$\int_{t_0}^{t_1}\delta L dt=0$$

由于是等时变分，所以上述方程又可表示为

$$\delta\int_{t_0}^{t_1} Ldt=\int_{t_0}^{t_1}\delta Ldt=0$$

即 $\delta S=0$ 得证。

2°从哈密顿正则方程导出哈密顿原理：

由于 $$H(q_i,p_i,t)=\sum_{i=1}^{n}p_i\dot{q}_i-L$$

所以将上述方程两边同时取等时变分得

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\delta q_i+\frac{\partial H}{\partial p_i}\delta p_i\right)=\sum_{i=1}^{n}(p_i\delta\dot{q}_i+\dot{q}_i\delta p_i)-\delta L$$

即 $$\delta L=\sum_{i=1}^{n}p_i\delta\dot{q}_i-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial q_i}\delta q_i+\sum_{i=1}^{n}\left(\dot{q}_i-\frac{\partial H}{\partial p_i}\right)\delta p_i$$

故 $$\int_{t_0}^{t_1}\delta Ldt=\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}p_i\delta\dot{q}_idt-\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial q_i}\delta q_idt+\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}\left(\dot{q}_i-\frac{\partial H}{\partial p_i}\right)\delta p_idt$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\int_{t_0}^{t_1}p_id(\delta q_i)-\sum_{i=1}^{n}\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial H}{\partial q_i}\delta q_idt+\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}\left(\dot{q}_i-\frac{\partial H}{\partial p_i}\right)\delta p_idt$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\Big[p_i\delta q_i\Big]_{t_0}^{t_1}-\sum_{i=1}^{n}\int_{t_0}^{t}\dot{p}_i\delta q_idt-\sum_{i=1}^{n}\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial H}{\partial q_i}\delta q_idt+$$

$$+\int_{t_0}^{t}\sum_{i=1}^{n}\left(\dot{q}_i-\frac{\partial H}{\partial p_i}\right)\delta p_idt \qquad (4.54)$$

由于A、B两端点是固定的，所以

$$\delta q_i(t_0)=0,\quad \delta q_i(t_1)=0$$

故上述（4.54）式又可表示为

$$\int_{t_0}^{t}\delta Ldt=-\int_{t_0}^{t}\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\dot{p}_i+\frac{\partial H}{\partial q_i}\right)\delta q_i-\left(\dot{q}_i-\frac{\partial H}{\partial p_i}\right)\delta p_i\right]\right\}dt \qquad (4.55)$$

把哈密顿正则方程

$$\begin{cases}\dot{p}_i=-\dfrac{\partial H}{\partial q_i}\\[2ex]\dot{q}_i=\dfrac{\partial H}{\partial p_i}\end{cases}\qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

代入上述（4.55）式即得

$$\int_{t_0}^{t_1}\delta Ldt=0$$

由于是等时变分，所以上述方程又可表示为

$$\delta\int_{t_0}^{t_1} Ldt=\int_{t_0}^{t_1}\delta Ldt=0$$

即 $\delta S=0$ 得证。

3°非有势力的完整质点组的哈密顿原理的推导：

由于 $S=\int_{t_0}^{t_1} Ldt$

所以在等时变分情况下

$$\begin{aligned}\delta S&=\delta\int_{t_0}^{t_1} Ldt\\&=\int_{t_0}^{t_1}\delta Ldt\\&=\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta\dot{q}_i\right)dt\\&=\int_{t_0}^{t_1}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i\right)dt+\sum_{i=1}^{n}\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}d(\delta q_i)\\&=\int_{t_0}^{t_1}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i\right)dt+\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right]_{t_0}^{t_1}-\\&\quad-\sum_{i=1}^{n}\int_{t_0}^{t_1}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i dt\end{aligned}\tag{4.56}$$

因为A、B点是固定点，所以

$$\delta q_i(t_0)=0,\qquad \delta q_i(t_1)=0$$

故上述（4.56）式又可表示为

$$\delta S=-\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}\right]\delta q_i dt\tag{4.57}$$

由于对应于广义坐标q_i的广义力Q_i是由部份有势力所对应的广义力与部份非有势力所对应的广义力两部份所组成，即

$$Q_i=Q_i^*-\frac{\partial V}{\partial q_i}$$

式中Q_i^*为非有势力所对应的广义力，所以拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}=Q_i \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

就变为

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}=Q_i^*-\frac{\partial V}{\partial q_i} \tag{4.58}$$

因为V仅为广义坐标q_i与时间t的函数，即$V=V(q_i,t)$，所以（4.58）式又可改写为

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial(T-V)}{\partial \dot{q}}\right]-\frac{\partial(T-V)}{\partial q_i}=Q_i^*$$

即

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=Q_i^* \tag{4.59}$$

将（4.59）式代入（4.57）式便有

$$\delta S=-\int_{t_0}^{t_1}\left(\sum_{i=1}^{n} Q_i^*\delta q_i\right)dt$$

即

$$\delta S+\int_{t_0}^{t_1}\left(\sum_{i=1}^{n} Q_i^*\delta q_i\right)dt=0 \quad \text{得证.}$$

3. 从哈密顿原理推导出拉格朗日方程与哈密顿正则方程

1° 从哈密顿原理推导拉格朗日方程

从变分法的观点来看，拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0 \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

就是完整保守质点组的哈密顿原理

$$\delta S=\delta\int_{t_0}^{t_1} L dt=0$$

的欧勒方程．只要把（4.17)式中的自变量x视为时间t，函数z_i视为q_i，泛函$J[z_i(x)]$视为$S[q_i(t)]$，并把被积函数F视为拉格朗日函数L，那么（4.19）式就可转化为拉格朗日方程．因此，拉格朗日方程是一束极值曲线的方程式，而且其中通过A点和B点的那条曲线给出积分$\int_{t_0}^{t_1} L dt$的极值．

当然，我们也可以直接进行变分的运算来加以推导．

由于 $L=L(q_i,\dot{q}_i,t)$

故有

$$\int_{t_0}^{t_1}\delta L dt=\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i\right)dt$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i dt+\sum_{i=1}^{n}\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}d(\delta q_i)$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i dt+\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right]_{t_0}^{t_1}-\sum_{i=1}^{n}\int_{t_0}^{t_1}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i dt$$

因为 $\delta q_i(t_0)=0,\quad \delta q_i(t_1)=0$

所以上述积分可表示为

$$\int_{t_0}^{t_1}\delta L dt=\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\right]\delta q_i dt \tag{4.60}$$

由哈密顿原理

$$\delta S=0$$

即

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}L dt=\int_{t_0}^{t_1}\delta L dt=0$$

于是，（4.60）式变为

$$\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\right]=0 \tag{4.61}$$

由于上述积分的范围是任意的，且 δq_i 是彼此独立又在积分的上下限上的数值等于零.故得上述积分（4.61）式的被积函数为零。亦即

$$\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)=0 \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

因此，拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0 \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

得证。

2。 由哈密顿原理推导正则方程：

由于 $H(q_i,p_i,t)=\sum_{i=1}^{n}p_i\dot{q}_i-L$

所以 $$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\delta q_i+\frac{\partial H}{\partial p_i}\delta p_i\right)=\sum_{i=1}^{n}(p_i\delta\dot{q}_i+\dot{q}_i\delta p_i)-\delta L$$

于是 $$\int_{t_0}^{t_1}\delta L dt=\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}\left[p_i\delta\dot{q}_i-\frac{\partial H}{\partial q_i}\delta q_i+\left(\dot{q}_i-\frac{\partial H}{\partial p_i}\right)\delta p_i\right]dt$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\int_{t_0}^{t_1}p_i\delta\dot{q}_i dt-\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial q_i}\delta q_i dt+$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}\left(\dot{q}_i-\frac{\partial H}{\partial p_i}\right)\delta p_i dt$$

$$
\begin{aligned}
&=\sum_{i=1}^{n}\int_{t_0}^{t_1}p_i d(\delta q_i)-\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial q_i}\delta q_i dt+\\
&\quad+\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}\left(\dot{q}_i-\frac{\partial H}{\partial p_i}\right)\delta p_i dt\\
&=\sum_{i=1}^{n}\Big[p_i\delta q_i\Big]_{t_0}^{t_1}-\sum_{i=1}^{n}\int_{t_0}^{t_1}\dot{p}_i\delta q_i dt-\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial q_i}\delta q_i dt+\\
&\quad+\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}\left(\dot{q}_i-\frac{\partial H}{\partial p_i}\right)\delta p_i dt
\end{aligned}
\tag{4.62}
$$

因为 $\qquad \delta q_i(t_0)=0,\qquad \delta q_i(t_1)=0$

所以（4.62）式就可表示为

$$
\int_{t_0}^{t_1}\delta L dt=-\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\dot{p}_i+\frac{\partial H}{\partial q_i}\right)\delta q_i-\left(\dot{q}_i-\frac{\partial H}{\partial p_i}\right)\delta p_i\right]dt \tag{4.63}
$$

由哈密顿原理

$$\delta S=0$$

即 $$\delta\int_{t_0}^{t_1}L dt=\int_{t_0}^{t_1}\delta L dt=0$$

故（4.63）式就变为

$$
\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\dot{p}_i+\frac{\partial H}{\partial q_i}\right)\delta q_i-\left(\dot{q}_i-\frac{\partial H}{\partial p_i}\right)\delta p_i\right]dt=0
$$

考虑到上述积分的范围是任意的，而且变分 δq_i、δp_i 是彼此独立的，因此 δq_i 和 δp_i 前面的系数必须等于零。亦即

$$
\begin{cases}
\dot{p}_i+\dfrac{\partial H}{\partial q_i}=0\\[2ex]
\dot{q}_i-\dfrac{\partial H}{\partial p_i}=0
\end{cases}
\qquad (i=1,2,\cdots,n)
$$

故

$$
\begin{cases}
\dot{p}_i=-\dfrac{\partial H}{\partial q_i}\\[2ex]
\dot{q}_i=\dfrac{\partial H}{\partial p_i}
\end{cases}
\qquad (i=1,2,\cdots,n)
$$

得证

从上述相互推导的过程中，我们可以清楚地看到，无论是以拉格朗日方程为基础的拉格朗日力学，还是以哈密顿正则方程与哈密顿原理为基础的哈密顿力学，它们在分析力学中的地位与作用是完全等价的。只不过，它们是从不同的角度来揭示共同的客观规律罢了。

下面我们举一些例子来进一步说明如何应用哈密顿原理解决动力学问题。

例1 试应用哈密顿原理证明质点在光滑水平面上作惯性运动时，其真实运动是走短程线。

证：由于质点在光滑水平面上作惯性运动，所以质点的势能

$$V=C\ (\text{常数，对所有轨道而言})$$

若设其动能为

$$T=\frac{1}{2}mv^2$$

式中m为质点的质量，v为质点沿某一轨道运动的速度，那么，根据能量积分得

$$T+V=\text{常数}\ (\text{对某一轨道而言})$$

于是，对某一运动轨道质点的动能为

$$T=\frac{1}{2}mv^2=\text{常数}$$

或 $$v=\text{常数}$$

因此，对某一轨道来说，哈密顿作用量为

$$\begin{aligned}S&=\int_{t_0}^{t_1}Ldt\\&=\int_{t_0}^{t_1}(T-V)dt\\&=\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{1}{2}mv^2-C\right)dt\\&=\left(\frac{1}{2}mv^2-C\right)(t_1-t_0)\end{aligned}$$

若设 $t=t_1-t_0$，那么上式又可表示为

$$S=\frac{1}{2}mv^2t-Ct$$

在等时变分的情况下（即$\delta t=0$）由哈密顿原理

$$\delta S=0$$

即得 $$mv\delta v\cdot t=0$$

故有 $$\delta v=0$$

即v取极小值。由此可见，在A和B之间，质点在同样时间t内（但具有不同的速度）所作的一切可能运动中，其真实的运动，速度取极小值。亦即，质点所走的路线为短程线（因为路程$S=vt$为极小值）。

例2 试计算下列的真实运动和运动学上可能运动在状态A（与时间$t=0$相符合）和B（与时间$t=t$相符合）之间的哈密顿作用量的数值并比较其大小。

（i）对于质点的真实的自由落体运动：$z=\frac{1}{2}gt^2$

（ii）对于两个运动学上可能的运动：$z=ct$和$z=at^3$。式中的常数c和a是由与

真实运动相同的路程之起始和最终位置来确定。

解：

（i）对于真实运动：　$z=\frac{1}{2}gt^2$　$\dot{z}=gt$

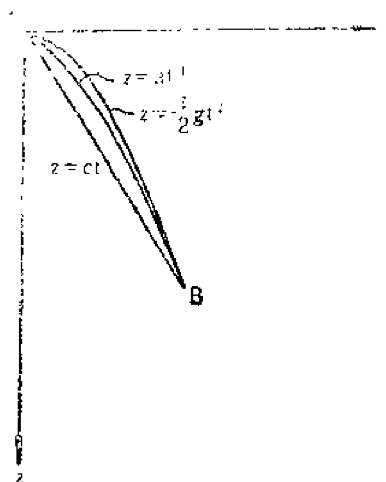


图　4.10

于是，质点的动能为

$$T=\frac{1}{2}m\dot{z}^2=\frac{1}{2}mg^2t^2$$

式中m为质点的质量，$\dot{z}$为质点沿着真实运动$z=\frac{1}{2}gt^2$的轨道运动的速度。

若选取水平轴At为势能的参考位置时，那么质点的势能为

$$V=-mgz=-\frac{1}{2}mg^2t^2$$

因此，质点的拉格朗日函数为

$$L=T-V=mg^2t^2$$

哈密顿作用量为

$$S=\int_{t_0}^{t_1}Ldt=\int_{t_0}^{t_1}mg^2t^2dt=\frac{1}{3}mg^2t_1^3$$

（ii）对于两个运动学上可能的运动：

1°　$z=ct$

$$\dot{z}=c$$

于是，质点的动能为

$$T=\frac{1}{2}m\dot{z}^2=\frac{1}{2}mc^2$$

式中m为质点的质量，$\dot{z}$为质点沿着可能运动$z=ct$的轨道运动的速度。

若选取水平轴At为势能的参考位置时，那么，质点的势能为

$$V=-mgz=-mgct$$

因此，质点的拉格朗日函数为

$$L=T-V=\frac{1}{2}mc^2+mgct$$

哈密顿作用量为

$$S_1=\int_{t_0}^{t_1}Ldt=\int_0^{t}\frac{1}{2}mc^2dt+\int_0^{t}mgctdt=\frac{1}{2}mc^2t_1+\frac{1}{2}mgct$$

由题给条件：　$z_1=\frac{1}{2}gt_1^2$　又　$z_1=ct_1$

故有　$c=\frac{1}{2}gt_1$

于是，哈密顿作用量为

$$S_1=\frac{1}{2}mc^2t_1+\frac{1}{2}mgct_1^2=\frac{3}{8}mg^2t_1^3$$

2° $z=at^3$

$\dot{z}=3at^2$

于是，质点的动能为

$$T=\frac{1}{2}m\dot{z}^2=\frac{9}{2}ma^2t^4$$

式中m为质点的质量，$\dot{z}$为质点沿着可能运动$z=at^3$的轨道的运动速度。

若选取水平轴At为势能的参考位置时，那么质点的势能为

$$V=-mgz=-mgat^3$$

因此，质点的拉格朗日函数为

$$L=T-V=\frac{9}{2}ma^2t^4+mgat^3$$

哈密顿作用量为

$$S_2=\int_0^{t_1}Ldt=\int_0^{t_1}\frac{9}{2}ma^2t^4dt+\int_0^{t_1}mgat^3dt=\frac{9}{10}ma^2t_1^5+\frac{1}{4}mgat_1^4$$

由题给条件：$z_1=\frac{1}{2}gt_1^2$ 又 $z_1=at_1^3$

故有 $a=\frac{g}{2t_1}$

于是，哈密顿作用量S_2又可表示为

$$S_2=\frac{9}{10}ma^2t_1^5+\frac{1}{4}mgat_1^4=\frac{7}{20}mg^2t_1^3$$

由此可见 $\frac{3}{8}:\frac{7}{20}:\frac{1}{3}=\frac{45}{120}:\frac{42}{120}:\frac{40}{120}$

亦即 $S_1>S_2>S$

其结论：真实运动的哈密顿作用量具有极小值。

例3 设质量为m的质点，受重力作用，被约束在半顶角为α的圆锥面内运动。锥面铅直，其底向上。试用哈密顿原理求该质点的运动微分方程。

解：选如图4.11所示的圆柱坐标系，那么质点的动能为

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+\dot{z}^2)$$

由图示可得约束条件：$z=r\,\mathrm{ctg}\alpha$

故有 $\dot{z}=\dot{r}\,\mathrm{ctg}\alpha$

于是，质点动能的表示式又可写为

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+\dot{r}^2\,\mathrm{ctg}^2\alpha)$$

$$=\frac{1}{2}m[(1+\mathrm{ctg}^2\alpha)\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2]$$

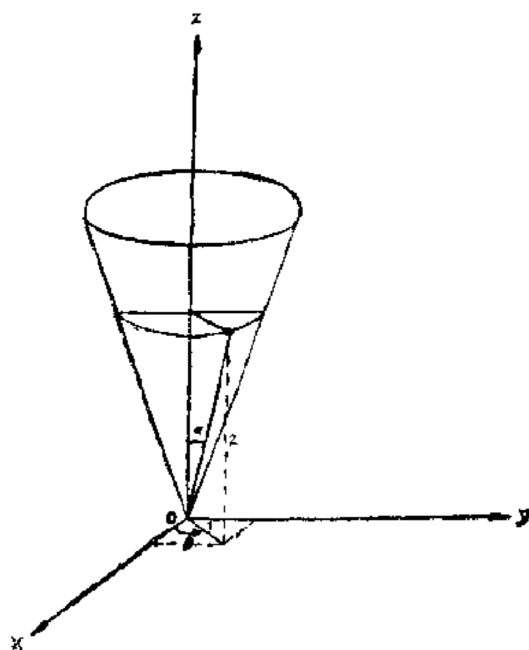


图 4.11

$$=\frac{1}{2}m\left(\frac{1}{\sin^2\alpha}\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2\right) \qquad (1)$$

若选取 xoy 平面为势能的参考面时，那么质点的势能为

$$V=mgz=mgr\,\mathrm{ctg}\alpha \qquad (2)$$

显然，质点具有二个自由质，故选 r，θ 为相应的广义坐标，于是，质点的拉格朗日函数为

$$L=T-V=\frac{1}{2}m\left(\frac{1}{\sin^2\alpha}\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2\right)-mgr\,\mathrm{ctg}\alpha \qquad (3)$$

因此，
$$\delta\int_{t_0}^{t_1}Ldt=\int_{t_0}^{t_1}\delta Ldt$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{m}{\sin^2\alpha}\dot{r}\delta\dot{r}+mr\dot{\theta}^2\delta r+mr^2\dot{\theta}\delta\dot{\theta}-mg\,\mathrm{ctg}\alpha\,\delta r\right)dt$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\frac{m}{\sin^2\alpha}\dot{r}d(\delta r)+\int_{t_0}^{t_1}mr^2\dot{\theta}d(\delta\theta)+\int_{t_0}^{t_1}(mr\dot{\theta}^2-mg\,\mathrm{ctg}\alpha)\delta rdt$$

$$=\left[\frac{m}{\sin^2\alpha}\dot{r}\delta r\right]_{t_0}^{t_1}-\int_{t_0}^{t_1}\frac{m}{\sin^2\alpha}\ddot{r}\delta rdt+\left[mr^2\dot{\theta}\delta\theta\right]_{t_0}^{t_1}-$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta})\delta\theta dt+\int_{t_0}^{t_1}(mr\dot{\theta}^2-mg\,\mathrm{ctg}\alpha)\delta rdt \qquad (4)$$

由于 $\delta r(t_0)=\delta r(t_1)=0$, $\delta\theta(t_0)=\delta\theta(t_1)=0$

所以（4）式又可表示为

$$\delta\int_{t_0}^{t_1} Ldt = -\int_{t_0}^{t_1}\left[\left(\frac{m}{\sin^2\alpha}\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + mg\,\text{ctg}\alpha\right)\delta r + \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta})\delta\theta\right]dt$$

由哈密顿原理

$$\delta S = \delta\int_{t_0}^{t_1} Ldt = 0$$

得 $$\int_{t_0}^{t_1}\left[\left(\frac{m}{\sin^2\alpha}\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + mg\,\text{ctg}\alpha\right)\delta r + \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta})\delta\theta\right]dt = 0$$

由于积分的范围是任意的，而且 δr 与 $\delta\theta$ 是彼此独立的，所以 δr 与 $\delta\theta$ 前的系数应等于零。故有

$$\begin{cases} m\left(\dfrac{1}{\sin^2\alpha}\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 + g\,\text{ctg}\alpha\right) = 0 \\ \dfrac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = 0 \end{cases}$$

或 $$\begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2\sin^2\alpha + g\sin\alpha\cdot\cos\alpha = 0 \\ r^2\dot{\theta} = \text{常数} \end{cases}$$

前面已经阐述过，拉格朗日方程、哈密顿正则方程以及哈密顿原理，它们完全是等价的。因此，本题同样可以利用拉格朗日方程或者哈密顿正则方程解之。

i. 利用拉格朗日方程解之：

由于 $$L = \frac{1}{2}m\left(\frac{1}{\sin^2\alpha}\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - mgr\,\text{ctg}\alpha$$

故利用拉格朗日方程

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial\dot{r}}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial r} = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial\theta} = 0 \end{cases}$$

便得 $$\begin{cases} m\cdot\dfrac{1}{\sin^2\alpha}\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + mg\,\text{ctg}\alpha = 0 \\ \dfrac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = 0 \end{cases}$$

即 $$\begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2\sin^2\alpha + g\sin\alpha\cdot\cos\alpha = 0 \\ r^2\dot{\theta} = \text{常数} \end{cases}$$

ii. 利用哈密顿正则方程解之：

由于 $$L = \frac{1}{2}m\left(\frac{1}{\sin^2\alpha}\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - mgr\,\text{ctg}\alpha$$

故由广义动量的定义得

$$\begin{cases} p_r = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \dfrac{m}{\sin^2\alpha}\dot{r} \\ p_\theta = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \end{cases}$$

即
$$\begin{cases} \dot{r} = \dfrac{\sin^2\alpha}{m} p_r \\ \dot{\theta} = \dfrac{p_\theta}{mr^2} \end{cases}$$

于是，质点的哈密顿函数可表为

$$H = \left[\sum_{l=1}^{2} p_l \dot{q}_l - L \right]_{\dot{q}_l \to p_l}$$

$$= \frac{\sin^2\alpha}{m} p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{mr^2} - \frac{1}{2} m \left(\frac{1}{\sin^2\alpha} \cdot \frac{\sin^4\alpha}{m^2} p_r^2 + r^2 \frac{p_\theta^2}{m^2 r^4} \right) + mgr\,\mathrm{ctg}\,\alpha$$

$$= \frac{1}{2m}\left(\sin^2\alpha\, p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} \right) + mgr\,\mathrm{ctg}\,\alpha \tag{5}$$

由哈密顿正则方程

$q_1 = r$：
$$\begin{cases} \dot{p}_r = -\dfrac{\partial H}{\partial r} \\ \dot{r} = \dfrac{\partial H}{\partial p_r} \end{cases}$$

得
$$\dot{p}_r = \frac{p_\theta^2}{mr^3} - mg\,\mathrm{ctg}\,\alpha \tag{6}$$
$$\dot{r} = \frac{\sin^2\alpha}{m} p_r \tag{7}$$

又由哈密顿正则方程

$q_2 = \theta$：
$$\begin{cases} \dot{p}_\theta = -\dfrac{\partial H}{\partial \theta} \\ \dot{\theta} = \dfrac{\partial H}{\partial p_\theta} \end{cases}$$

得
$$\dot{p}_\theta = 0 \tag{8}$$
$$\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2} \tag{9}$$

将（7）式对 t 求导得

$$\ddot{r} = \frac{\sin^2\alpha}{m} \dot{p}_r \tag{10}$$

把（9）式与（10）式同时代入（6）式并经整理得

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \sin^2\alpha + g\sin\alpha\cos\alpha = 0 \tag{11}$$

将（9）式对 t 求导后代入（8）式便得

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta})=0$$

立即　$r^2\dot{\theta}=$常数　（12）

因此，质点的运动微分方程为

$$\begin{cases}\ddot{r}-r\dot{\theta}^2\sin^2\alpha+g\sin\alpha\cos\alpha=0\\ r^2\dot{\theta}=\text{常数}\end{cases}$$

从上述三种解法的过程中，我们可以清楚地看到，利用拉格朗日方程解之最为方便，其次是哈密顿原理。至于利用哈密顿正则方程解之，一般说来较为麻烦。因此，拉格朗日方程在解决分析动力学问题中，具有较高的实用价值。

例 4　试由哈密顿原理导出作惯性运动的球对称陀螺的运动微分方程。

解：由于球对称的性质，我们得到球对称陀螺绕定点运动的转动惯量为

$$J=J_{xx}=J_{yy}=J_{zz}$$

于是，陀螺的动能可表示为

$$T=\frac{1}{2}J(\omega_x^2+\omega_y^2+\omega_z^2)\tag{1}$$

式中 ω_x、ω_y、ω_z 分别表示陀螺绕定点运动时，瞬时角速度在 x，y，z 坐标轴上的分量。

由欧勒运动学方程

$$\begin{cases}\omega_x=\dot{\psi}\sin\theta\cdot\sin\varphi+\dot{\theta}\cos\varphi\\ \omega_y=\dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi-\dot{\theta}\sin\varphi\\ \omega_z=\dot{\psi}\cos\theta+\dot{\varphi}\end{cases}$$

式中 ψ 为进动角，θ 为章动角，φ 为自转角，而 $\dot{\psi}$ 为进动角速度，$\dot{\theta}$ 为章动角速度，$\dot{\varphi}$ 为自转角速度。故（1）式又可表示为

$$T=\frac{1}{2}J[\dot{\psi}^2\sin^2\theta+\dot{\theta}^2+\dot{\psi}^2\cos^2\theta+2\dot{\psi}\dot{\varphi}\cos\theta+\dot{\varphi}^2]$$

$$=\frac{1}{2}J[\dot{\psi}^2+\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2+2\dot{\varphi}\dot{\psi}\cos\theta]\tag{2}$$

又由惯性运动的特性得陀螺的势能为

$$V=C\,(\text{常数})\tag{3}$$

显然，陀螺具有三个自由度，故选三个欧勒角 ψ，θ，φ 为相应的广义坐标。于是，陀螺的拉格朗日函数为

$$L=T-V=\frac{1}{2}J[\dot{\psi}^2+\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2+2\dot{\varphi}\dot{\psi}\cos\theta]-C\tag{4}$$

因此　$\delta\int_{t_0}^{t_1}Ldt=\int_{t_0}^{t_1}\delta Ldt$

$$=\int_{t_0}^{t_1}J[\dot{\psi}\delta\dot{\psi}+\dot{\theta}\delta\dot{\theta}+\dot{\varphi}\delta\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta\delta\dot{\varphi}+\dot{\varphi}\cos\theta\delta\dot{\psi}-\dot{\varphi}\dot{\psi}\sin\theta\delta\theta]dt$$

$$=\int_{t_0}^{t_1} J\dot{\psi}d(\delta\psi)+\int_{t_0}^{t_1} J\dot{\theta}d(\delta\theta)+\int_{t_0}^{t_1} J\dot{\varphi}d(\delta\varphi)+\int_{t_0}^{t_1} J\dot{\psi}\cos\theta d(\delta\varphi)+$$

$$+\int_{t_0}^{t_1} J\varphi\cos\theta d(\delta\psi)-\int_{t_0}^{t_1} J\dot{\varphi}\dot{\psi}\sin\theta\delta\theta dt$$

$$=\int_{t_0}^{t_1} J(\dot{\psi}+\dot{\varphi}\cos\theta)d(\delta\psi)+\int_{t_0}^{t_1} J(\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta)d(\delta\varphi)+$$

$$+\int_{t_0}^{t_1} J\dot{\theta}d(\delta\theta)-\int_{t_0}^{t_1} J\dot{\varphi}\dot{\psi}\sin\theta\delta\theta dt$$

$$=\Big[J(\dot{\psi}+\dot{\varphi}\cos\theta)\delta\psi\Big]_{t_0}^{t_1}-\int_{t_0}^{t_1} J(\ddot{\psi}+\ddot{\varphi}\cos\theta-\dot{\varphi}\dot{\theta}\sin\theta)\delta\psi dt+$$

$$+\Big[J(\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta)\delta\varphi\Big]_{t_0}^{t_1}-\int_{t_0}^{t_1} J(\ddot{\varphi}+\ddot{\psi}\cos\theta-\dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta)\delta\varphi dt+$$

$$+\Big[J\dot{\theta}\delta\theta\Big]_{t_0}^{t_1}-\int_{t_0}^{t_1} J\ddot{\theta}\delta\theta dt-\int_{t_0}^{t_1} J\dot{\varphi}\dot{\psi}\sin\theta\delta\theta dt \qquad (5)$$

由于 $\delta\psi(t_0)=\delta\psi(t_1)=0$

$\delta\varphi(t_0)=\delta\varphi(t_1)=0$

$\delta\theta(t_0)=\delta\theta(t_1)=0$

所以（5）式又可表示为

$$\delta\int_{t_0}^{t_1} Ldt=-J\int_{t_0}^{t_1}[(\ddot{\psi}-\dot{\varphi}\dot{\theta}\sin\theta+\ddot{\varphi}\cos\theta)\delta\psi+(\ddot{\varphi}-\dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta+\ddot{\psi}\cos\theta)\delta\varphi+$$

$$+(\ddot{\theta}+\dot{\varphi}\dot{\psi}\sin\theta)\delta\theta]dt$$

由哈密顿原理

$$\delta S=\delta\int_{t_0}^{t_1} Ldt=0$$

得 $$\int_{t_0}^{t_1}[(\ddot{\psi}-\dot{\varphi}\dot{\theta}\sin\theta+\ddot{\varphi}\cos\theta)\delta\psi+(\ddot{\varphi}-\dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta+\ddot{\psi}\cos\theta)\delta\varphi+$$

$$+(\ddot{\theta}+\dot{\varphi}\dot{\psi}\sin\theta)\delta\theta]dt=0$$

因为积分的范围是任意的，且 $\delta\psi$、$\delta\varphi$、$\delta\theta$ 是彼此独立的，所以 $\delta\psi$、$\delta\varphi$、$\delta\theta$ 前面的系数应等于零.

故有
$$\begin{cases}\ddot{\psi}-\dot{\varphi}\dot{\theta}\sin\theta+\ddot{\varphi}\cos\theta=0\\ \ddot{\varphi}-\dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta+\ddot{\psi}\cos\theta=0\\ \ddot{\theta}+\dot{\varphi}\dot{\psi}\sin\theta=0\end{cases}$$

或者
$$\begin{cases}\dot{\psi}+\dot{\varphi}\cos\theta=\text{常数}\\ \dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta=\text{常数}\\ \ddot{\theta}+\dot{\varphi}\dot{\psi}\sin\theta=0\end{cases}$$

例 5 试用哈密顿原理解第三章中的例题 7 .

解： 由于质点M的拉格朗日函数为

$$L=\frac{1}{2}m(R^2\dot{\varphi}^2+\dot{Z}^2)-\frac{1}{2}k(R^2+Z^2) \qquad (1)$$

所以 $\delta\int_{t_0}^{t_1}Ldt=\int_{t_0}^{t_1}\delta Ldt$

$$=\int_{t_0}^{t_1}[m(R^2\dot{\varphi}\delta\dot{\varphi}+\dot{Z}\delta\dot{Z})-kZ\delta Z]dt$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}mR^2\dot{\varphi}d(\delta\varphi)+\int_{t_0}^{t_1}m\dot{Z}d(\delta Z)-\int_{t_0}^{t_1}kZ\delta Zdt$$

$$=\left[mR^2\dot{\varphi}\delta\varphi\right]_{t_0}^{t_1}-\int_{t_0}^{t_1}mR^2\ddot{\varphi}\delta\varphi dt+\left[m\dot{Z}\delta Z\right]_{t_0}^{t_1}-$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}m\ddot{Z}\delta Zdt-\int_{t_0}^{t_1}kZ\delta Zdt \qquad (2)$$

因为 $\delta\varphi(t_0)=\delta\varphi(t_1)=0$

$\delta Z(t_0)=\delta Z(t_1)=0$

故（2）式又可表示为

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}Ldt=-\int_{t_0}^{t_1}[mR^2\ddot{\varphi}\delta\varphi+(m\ddot{Z}+kZ)\delta Z]dt \qquad (3)$$

由哈密顿原理

$$\delta S=\delta\int_{t_0}^{t_1}Ldt=0$$

得 $\int_{t_0}^{t_1}[mR^2\ddot{\varphi}\delta\varphi+(m\ddot{Z}+kZ)\delta Z]dt=0$

由于积分范围是任意的且 $\delta\varphi$ 与 δZ 是彼此独立的，因此 $\delta\varphi$、δZ 前面的系数应等于零。故有

$$\begin{cases} mR^2\ddot{\varphi}=0 & (4)\\ m\ddot{Z}+kZ=0 & (5)\end{cases}$$

解上述方程组便得

$$\begin{cases} Z=A\sin\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}t+\alpha\right)\\ \varphi=c_1t+c_2\end{cases}$$

式中 A、α、c_1、c_2 均为积分常数。显然此结果与第三章中用哈密顿正则方程解得的结果完全一样。只不过，用哈密顿原理解之较为简单。

例 6 试用哈密顿原理解第三章中的例题14。

解：由于质点的拉格朗日函数为

$$L=\frac{1}{2}m\left[\left(1+\frac{4\rho^2}{a^2}\right)\dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\varphi}^2\right]-mg\frac{\rho^2}{a} \qquad (1)$$

因此 $\delta\int_{t_0}^{t_1}Ldt=\int_{t_0}^{t_1}\delta Ldt$

$$=\int_{t_0}^{t_1}m\left[\left(1+\frac{4\rho^2}{a^2}\right)\dot{\rho}\delta\dot{\rho}+\frac{4\rho}{a^2}\dot{\rho}^2\delta\rho+\rho\dot{\varphi}^2\delta\rho+\dot{\varphi}\rho^2\delta\dot{\varphi}-\frac{2g}{a}\rho\delta\rho\right]dt$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}m\left(1+\frac{4\rho^2}{a^2}\right)\dot{\rho}d(\delta\rho)+\int_{t_0}^{t_1}m\dot{\varphi}\rho^2d(\delta\varphi)+\int_{t_0}^{t_1}m\left(\frac{4\rho}{a^2}\dot{\rho}^2+\rho\dot{\varphi}^2-\right.$$

$$-\frac{2g}{a}\rho\Big)\delta\rho dt$$

$$=\Big[m\Big(1+\frac{4\rho^2}{a^2}\Big)\dot{\rho}\delta\rho\Big]_{t_0}^{t_1}-\int_{t_0}^{t_1}m\Big[\Big(1+\frac{4\rho^2}{a^2}\Big)\ddot{\rho}+\frac{8\rho}{a^2}\dot{\rho}^2\Big]\delta\rho dt+$$

$$+\Big[m\dot{\varphi}\rho^2\delta\varphi\Big]_{t_0}^{t_1}-\int_{t_0}^{t_1}m(\ddot{\varphi}\rho^2+2\rho\dot{\rho}\dot{\varphi})\delta\varphi dt+$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}m\Big(\frac{4\rho}{a^2}\dot{\rho}^2+\rho\dot{\varphi}^2-\frac{2g}{a}\rho\Big)\delta\rho dt \qquad (2)$$

因为 $\delta\rho(t_0)=\delta\rho(t_1)=0$

$\delta\varphi(t_0)=\delta\varphi(t_1)=0$

所以（2）式又可表示为

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}Ldt=-\int_{t_0}^{t_1}m\Big\{\Big[\Big(1+\frac{4\rho^2}{a^2}\Big)\ddot{\rho}+\frac{4\rho}{a^2}\dot{\rho}^2-\rho\dot{\varphi}^2+\frac{2g\rho}{a}\Big]\delta\rho+$$

$$+(\rho^2\ddot{\varphi}+2\rho\dot{\rho}\dot{\varphi})\delta\varphi\Big\}dt$$

$$=-\int_{t_0}^{t_1}m\Big\{\Big[\Big(1+\frac{4\rho^2}{a^2}\Big)\ddot{\rho}+\frac{4\rho}{a^2}\dot{\rho}^2-\rho\dot{\varphi}^2+\frac{2g\rho}{a}\Big]\delta\rho+\frac{d}{dt}(m\rho^2\dot{\varphi})\delta\varphi\Big\}dt$$

由哈密顿原理

$$\delta S=\delta\int_{t_0}^{t_1}Ldt=0$$

得 $$\int_{t_0}^{t_1}m\Big\{\Big[\Big(1+\frac{4\rho^2}{a^2}\Big)\ddot{\rho}+\frac{4\rho}{a^2}\dot{\rho}^2-\rho\dot{\varphi}^2+\frac{2g\rho}{a}\Big]\delta\rho+\frac{d}{dt}(m\rho^2\dot{\varphi})\delta\varphi\Big\}dt=0$$

由于上述积分的范围是任意的，而且 $\delta\rho$、$\delta\varphi$ 是彼此独立的，又在积分的上下限的数值为零，因此得 $\delta\rho$ 与 $\delta\varphi$ 前的系数应为零。亦即

$$\begin{cases}\Big(1+\frac{4\rho^2}{a^2}\Big)\ddot{\rho}+\frac{4\rho}{a^2}\dot{\rho}^2-\rho\dot{\varphi}^2+\frac{2g\rho}{a}=0\\ \frac{d}{dt}(m\rho^2\dot{\varphi})=0\end{cases}$$

显然，此结果与第三章中用哈密顿正则方程解得的结果完全一样。

例 7 试用哈密顿原理解 §2—2 中的例题 14。

解：由于园柱的拉格朗日函数为

$$L=\frac{1}{2}m(r^2+a^2+K^2-2ar\cos\varphi)\dot{\varphi}^2-mg(r-a\cos\varphi) \qquad (1)$$

所以 $\delta\int_{t_0}^{t_1}Ldt=\int_{t_0}^{t_1}\delta Ldt$

$$=\int_{t_0}^{t_1}m[(r^2+a^2+K^2-2ar\cos\varphi)\dot{\varphi}\delta\dot{\varphi}+ar\sin\varphi\dot{\varphi}^2\delta\varphi-ga\sin\varphi\delta\varphi]dt$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}m[(r^2+a^2+K^2-2ar\cos\varphi)\dot{\varphi}]d(\delta\varphi)+$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}m(ar\sin\varphi\dot{\varphi}^2-ga\sin\varphi)\delta\varphi dt$$

$$=\left[m(r^2+a^2+K^2-2ar\cos\varphi)\dot{\varphi}\delta\varphi\right]_{t_0}^{t_1}-$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}m[(r^2+a^2+K^2-2ar\cos\varphi)\ddot{\varphi}+2ar\sin\varphi\dot{\varphi}^2]\delta\varphi dt+$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}m(ar\sin\varphi\dot{\varphi}^2-ga\sin\varphi)\delta\varphi dt \qquad (2)$$

因为 $\delta\varphi(t_0)=\delta\varphi(t_1)=0$

故（2）式又可表示为

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}Ldt=-\int_{t_0}^{t_1}m[(r^2+a^2+K^2-2ar\cos\varphi)\ddot{\varphi}+ar\sin\varphi\dot{\varphi}^2+ga\sin\varphi]\delta\varphi dt$$

由哈密顿原理

$$\delta S=\delta\int_{t_0}^{t_1}Ldt=0$$

得 $$\int_{t_0}^{t_1}m[(r^2+a^2+K^2-2ar\cos\varphi)\ddot{\varphi}+ar\sin\varphi\dot{\varphi}^2+ga\sin\varphi]\delta\varphi dt=0$$

由于上述积分的范围是任意的，且 $\delta\varphi$ 任意又在积分上下限上的数值为零，因此得 $\delta\varphi$ 前的系数应为零。即

$$m[(r^2+a^2+K^2-2ar\cos\varphi)\ddot{\varphi}+ar\sin\varphi\dot{\varphi}^2+ga\sin\varphi]=0 \qquad (3)$$

因为 $\ddot{\varphi}=\dot{\varphi}\dfrac{d\dot{\varphi}}{d\varphi}$ 所以（3）式又可改写为

$$\frac{1}{2}\frac{d}{d\varphi}[(r^2+a^2+K^2-2ar\cos\varphi)\dot{\varphi}^2]=-ga\sin\varphi$$

于是 $$\int d[(r^2+a^2+K^2-2ar\cos\varphi)\dot{\varphi}^2]=-\int 2ga\sin\varphi\, d\varphi$$

利用初条件 $t=0$ 时：$\varphi=\varphi_0$，$\dot{\varphi}=0$ 得

$$(r^2+a^2+K^2-2ar\cos\varphi)\dot{\varphi}^2=2ga(\cos\varphi-\cos\varphi_0)$$

即 $$\dot{\varphi}^2=\frac{2ga(\cos\varphi-\cos\varphi_0)}{r^2+a^2+K^2-2ar\cos\varphi}$$

显然，此结果与 §2—2 中用拉格朗日方程解得的结果完全一样。

例 8 试用哈密顿原理解 §2—2 中的例题20。

解： 由于系统的拉格朗日函数为

$$L=\frac{1}{4}m_1r_1^2\dot{\varphi}_1^2+\frac{1}{2}m_2\dot{y}_2^2+\frac{1}{4}m_2(\dot{y}_2-r_1\dot{\varphi}_1)^2+m_2gy_2 \qquad (1)$$

因此

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}Ldt=\int_{t_0}^{t_1}\delta Ldt$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\left[\frac{1}{2}m_1r_1^2\dot{\varphi}_1\delta\dot{\varphi}+m_2\dot{y}_2\delta\dot{y}_2+\frac{1}{2}m_2(\dot{y}_2-r_1\dot{\varphi}_1)(\delta\dot{y}_2-r_1\delta\dot{\varphi}_1)+\right.$$

$$+m_2 g\delta y_2\Big]dt$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\Big[\frac{1}{2}(m_1r_1^2\dot{\varphi}_1-m_2r_1\dot{y}_2+m_2r_1^2\dot{\varphi}_1)\delta\dot{\varphi}_1+\Big(\frac{3}{2}m_2\dot{y}_2-\frac{1}{2}m_2r_1\dot{\varphi}_1\Big)\delta\dot{y}_2+$$

$$+m_2g\delta y_2\Big]dt$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\frac{1}{2}[(m_1+m_2)r_1^2\dot{\varphi}_1-m_2r_1\dot{y}_2]\delta\dot{\varphi}_1dt+\int_{t_0}^{t_1}\Big(\frac{3}{2}m_2\dot{y}_2-$$

$$-\frac{1}{2}m_2r_1\dot{\varphi}_1\Big)\delta\dot{y}_2dt+\int_{t_0}^{t_1}m_2g\delta y_2dt$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\frac{1}{2}[(m_1+m_2)r_1^2\dot{\varphi}_1-m_2r_1\dot{y}_2]d(\delta\varphi_1)+\int_{t_0}^{t_1}\Big(\frac{3}{2}m_2\dot{y}_2-$$

$$-\frac{1}{2}m_2r_1\dot{\varphi}_1\Big)d(\delta y_2)+\int_{t_0}^{t_1}m_2g\delta y_2dt$$

$$=\Big\{\frac{1}{2}[m_1+m_2)r_1^2\dot{\varphi}-m_2r_1\dot{y}_2]\delta\varphi_1\Big\}_{t_0}^{t_1}-\int_{t_0}^{t_1}\frac{1}{2}[(m_1+m_2)r_1^2\ddot{\varphi}_1-$$

$$-m_2r_1\ddot{y}_2]\delta\varphi_1dt+\Big[\Big(\frac{3}{2}m_2\dot{y}_2-\frac{1}{2}m_2r_1\dot{\varphi})\delta y_2\Big]_{t_0}^{t_1}-$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\Big(\frac{3}{2}m_2\ddot{y}_2-\frac{1}{2}m_2r_1\ddot{\varphi}_1\Big)\delta y_2dt+\int_{t_0}^{t_1}m_2g\delta y_2dt \qquad (2)$$

由于 $\delta\varphi_1(t_0)=\delta\varphi_1(t_1)=0$

$\delta y_2(t_1)=\delta y_2(t_1)=0$

所以（2）式又可表示为

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}Ldt=-\int_{t_0}^{t_1}\Big\{\frac{1}{2}[(m_1+m_2)r_1^2\ddot{\varphi}_1-m_2r_1\ddot{y}_2]\delta\varphi_1+$$

$$+\Big(\frac{3}{2}m_2\ddot{y}_2-\frac{1}{2}m_2r_1\ddot{\varphi}_1-m_2g\Big)\delta y_2\Big\}dt$$

由哈密顿原理

$$\delta S=\delta\int_{t_0}^{t_1}Ldt=0$$

得 $\int_{t_0}^{t_1}\Big\{\frac{1}{2}[(m_1+m_2)r_1^2\ddot{\varphi}_1-m_2r_1\ddot{y}_2]\delta\varphi_1+\Big(\frac{3}{2}m_2\ddot{y}_2-\frac{1}{2}m_2r_1\ddot{\varphi}_1-m_2g\Big)\delta y_2\Big\}dt=0$

由于上述积分的范围是任意的，$\delta\varphi_1$ 与 δy_2 又彼此独立且在积分的上下限上的数值为零，因此得 $\delta\varphi_1$ 与 δy_2 前的系数应为零。

亦即

$$\begin{cases}\frac{1}{2}[(m_1+m_2)r_1^2\ddot{\varphi}_1-m_2r_1\ddot{y}_2]=0 & (3)\\ \frac{3}{2}m_2\ddot{y}_2-\frac{1}{2}m_2r_1\ddot{\varphi}_1-m_2g=0 & (4)\end{cases}$$

参照 §2—2 中的例题20的具体解法可得：

$$\dot{\varphi}_1=\frac{2p_2gt}{(3p_1+2p_2)r_1} \qquad (5)$$

$$\dot{y}_2=\frac{2(p_1+p_2)gt}{3p_1+2p_2} \tag{6}$$

$$\dot{\varphi}_2=\frac{2p_1gt}{(3p_1+2p_2)r_2} \tag{7}$$

而

$$S=\int_0^t \dot{y}_2 dt=\frac{(p_1+p_2)gt^2}{3p_1+2p_2} \tag{8}$$

例 9 两个质量分别为 m_1 与 m_2 的质点 A 和 B，用长为 $2l$ 的无重刚性杆联结，然后将其放在半径为 R 的光滑球形穴（如图4.12所示）。试用哈密顿原理求系统自由振动的运动微分方程。

解：由于系统具有一个自由度，故选 φ 为相应的广义坐标，如图4.12所示．于是，A 点的坐标为

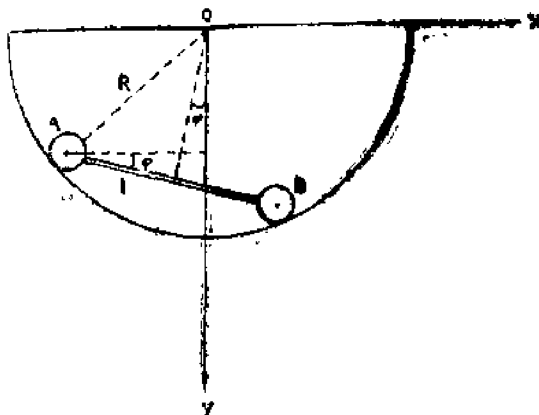


图4.12

$$\begin{cases} x_1=-(\sqrt{R^2-l^2}\ \sin\varphi+l\cos\varphi) \\ y_1=(\sqrt{R^2-l^2}\ \cos\varphi-l\sin\varphi) \end{cases}$$

其速度为

$$\begin{cases} \dot{x}_1=-(\sqrt{R^2-l^2}\ \cos\varphi-l\sin\varphi)\dot{\varphi} \\ \dot{y}_1=-(\sqrt{R^2-l^2}\ \sin\varphi+l\cos\varphi)\dot{\varphi} \end{cases}$$

B 点的坐标为

$$\begin{cases} x_2=l\cos\varphi-\sqrt{R^2-l^2}\ \sin\varphi \\ y_2=l\sin\varphi+\sqrt{R^2-l^2}\ \cos\varphi \end{cases}$$

其速度为

$$\begin{cases} \dot{x}_2=-(l\sin\varphi+\sqrt{R^2-l^2}\ \cos\varphi)\dot{\varphi} \\ \dot{y}_2=(l\cos\varphi-\sqrt{R^2-l^2}\ \sin\varphi)\dot{\varphi} \end{cases}$$

故系统的动能可表为

$$T=\frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1^2+\dot{y}_1^2)+\frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2+\dot{y}_2^2)=\frac{1}{2}(m_1+m_2)R^2\dot{\varphi}^2 \tag{1}$$

若选 0 点为系统势能的参考点时，那么系统的势能为

$$
\begin{aligned}
V&=-m_1gy_1-m_2gy_2\\
&=-m_1g(\sqrt{R^2-l^2}\cos\varphi-l\sin\varphi)-m_2g(\sqrt{R^2-l^2}\cos\varphi+l\sin\varphi)\\
&=-(m_1+m_2)g\sqrt{R^2-l^2}\cos\varphi-(m_2-m_1)gl\sin\varphi \qquad (2)
\end{aligned}
$$

因而，系统的拉格朗日函数为

$$L=T-V=\frac{1}{2}(m_1+m_2)R^2\dot{\varphi}^2+(m_1+m_2)g\sqrt{R^2-l^2}\cos\varphi+(m_2-m_1)gl\sin\varphi \qquad (3)$$

故

$$
\begin{aligned}
\delta\int_{t_0}^{t_1}Ldt&=\int_{t_0}^{t_1}\delta Ldt\\
&=\int_{t_0}^{t_1}[(m_1+m_2)R^2\dot{\varphi}\delta\dot{\varphi}-(m_1+m_2)g\sqrt{R^2-l^2}\sin\varphi\delta\varphi+\\
&\quad+(m_2-m_1)gl\cos\varphi\delta\varphi]dt\\
&=\int_{t_0}^{t_1}(m_1+m_2)R^2\dot{\varphi}d(\delta\varphi)-\\
&\quad-\int_{t_0}^{t_1}[(m_1+m_2)g\sqrt{R^2-l^2}\sin\varphi+(m_1-m_2)gl\cos\varphi]\delta\varphi dt\\
&=\Big[(m_1+m_2)R^2\dot{\varphi}\delta\varphi\Big]_{t_0}^{t_1}-\int_{t_0}^{t_1}(m_1+m_2)R^2\ddot{\varphi}\delta\varphi dt\\
&\quad-\int_{t_0}^{t_1}[(m_1+m_2)g\sqrt{R^2-l^2}\sin\varphi+(m_1-m_2)gl\cos\varphi]\delta\varphi dt \qquad (4)
\end{aligned}
$$

由于 $\delta\varphi(t_0)=\delta\varphi(t_1)=0$ 所以（4）式可表示为

$$
\begin{aligned}
\delta\int_{t_0}^{t_1}Ldt=-\int_{t_0}^{t_1}&[(m_1+m_2)R^2\ddot{\varphi}+(m_1+m_2)g\sqrt{R^2-l^2}\sin\varphi+\\
&+(m_1-m_2)gl\cos\varphi]\delta\varphi dt
\end{aligned}
$$

由哈密顿原理

得 $\int_{t_0}^{t_1}[(m_1+m_2)R^2\ddot{\varphi}+(m_1+m_2)g\sqrt{R^2-l^2}\sin\varphi+(m_1-m_2)gl\cos\varphi]\delta\varphi dt=0$

由于上述的积分范围是任意的，又 $\delta\varphi$ 也是任意的且在积分的上下限的值为零，因此得 $\delta\varphi$ 前的系数应为零。即

$$(m_1+m_2)R^2\ddot{\varphi}+(m_1+m_2)g\sqrt{R^2-l^2}\sin\varphi+(m_1-m_2)gl\cos\varphi=0$$

上式便是系统的自由振动的运动微分方程

例10 圆柱的质量为 M、半径为 R，以铰与杆相连，杆的质量为 m，长为 l。圆柱在平面上只滚不滑。试用哈密顿原理，求此系统的运动微分方程。

解：由于系统具有二个自由度，故选圆柱的质心 O' 的横坐标 x 与杆的摆角 φ 为相应的广义坐标，如图4.13所示。于是，杆的质心 C 的坐标为

$$
\begin{cases}
x_c=x+\dfrac{l}{2}\sin\varphi\\
y_c=-\left(\dfrac{l}{2}\cos\varphi-R\right)
\end{cases}
$$

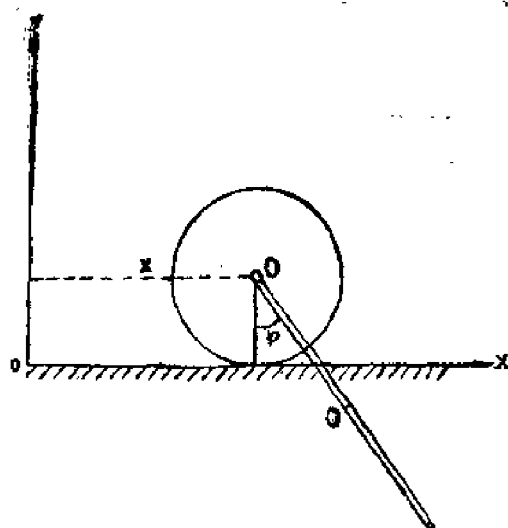


图4.13

故有
$$\begin{cases}\dot{x}_c=\dot{x}+\frac{l}{2}\cos\varphi\,\dot{\varphi}\\ \dot{y}_c=\frac{l}{2}\sin\varphi\,\dot{\varphi}\end{cases}$$

因而系统的动能为

$$T=\frac{1}{2}MV_{O'}^2+\frac{1}{2}J_{O'}\omega_{O'}^2+\frac{1}{2}mV_C^2+\frac{1}{2}J_C\omega_C^2$$

式中$V_{O'}$为圆柱质心O'的平动速度，$J_{O'}$为圆柱对过质心O'的转动轴的转动惯量，而$\omega_{O'}$为圆柱绕过其质心O'的转动轴的转动角速度。同样，V_C为杆的质心C的速度，J_C为杆对过其质心C的转动轴的转动惯量，而ω_C为杆绕过其质心C的转动轴的转动角速度。

由题给条件得：

$$V_{O'}=\dot{x},\qquad J_{O'}=\frac{1}{2}MR^2,\qquad \omega_{O'}=\frac{\dot{x}_C}{R}$$

$$V_C^2=\dot{x}_C^2+\dot{y}_C^2,\qquad J_C=\frac{1}{12}ml^2,\qquad \omega_C=\dot{\varphi}$$

所以，系统的动能又可表示为

$$T=\frac{1}{2}M\dot{x}^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}MR^2\cdot\frac{\dot{x}^2}{R^2}+\frac{1}{2}m\Big[\Big(\dot{x}+\frac{l}{2}\cos\varphi\,\dot{\varphi}\Big)^2+\Big(\frac{l}{2}\sin\varphi\,\dot{\varphi}\Big)^2\Big]+\frac{1}{2}\cdot\frac{ml^2}{12}\dot{\varphi}^2$$

$$=\frac{1}{2}\Big(m+\frac{3}{2}M\Big)\dot{x}^2+\frac{1}{2}ml\cos\varphi\,\dot{x}\dot{\varphi}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}ml^2\dot{\varphi}^2 \tag{1}$$

若选O'点为系统的势能的参考点时，那么系统的势能为

$$V=-\frac{1}{2}mgl\cos\varphi \tag{2}$$

于是，系统的拉格朗日函数为

$$L=T-V=\frac{1}{2}\left(m+\frac{3}{2}M\right)\dot{x}^2+\frac{1}{2}ml\cos\varphi\dot{x}\dot{\varphi}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}ml^2\dot{\varphi}^2+$$

$$+\frac{1}{2}mgl\cos\varphi \tag{3}$$

因此 $\delta\int_{t_0}^{t_1}Ldt=\int_{t_0}^{t_1}\delta Ldt$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\left[\left(m+\frac{3}{2}M\right)\dot{x}\delta\dot{x}+\frac{1}{2}ml\cos\varphi\dot{\varphi}\delta\dot{x}+\frac{1}{2}ml\cos\varphi\dot{x}\delta\dot{\varphi}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}ml\sin\varphi\dot{x}\dot{\varphi}\delta\varphi+\frac{1}{3}ml^2\dot{\varphi}\delta\dot{\varphi}-\frac{1}{2}mgl\sin\varphi\delta\varphi\right]dt$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\left\{\left[\left(m+\frac{3}{2}M\right)\dot{x}+\frac{1}{2}ml\cos\varphi\dot{\varphi}\right]\delta\dot{x}+\left(\frac{1}{2}ml\cos\varphi\dot{x}+\frac{1}{3}ml^2\dot{\varphi}\right)\delta\dot{\varphi}-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{1}{2}ml\sin\varphi\dot{x}\dot{\varphi}+\frac{1}{2}mgl\sin\varphi\right)\delta\varphi\right\}dt$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\left[\left(m+\frac{3}{2}M\right)\dot{x}+\frac{1}{2}ml\cos\varphi\dot{\varphi}\right]d(\delta x)+$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{1}{2}ml\cos\varphi\dot{x}+\frac{1}{3}ml^2\dot{\varphi}\right)d(\delta\varphi)-$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{1}{2}ml\sin\varphi\dot{x}\dot{\varphi}+\frac{1}{2}mgl\sin\varphi\right)\delta\varphi dt$$

$$=\left\{\left[\left(m+\frac{3}{2}M\right)\dot{x}+\frac{1}{2}ml\cos\varphi\dot{\varphi}\right]\delta x\right\}_{t_0}^{t_1}-$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\left[\left(m+\frac{3}{2}M\right)\ddot{x}+\frac{1}{2}ml\cos\varphi\ddot{\varphi}-\frac{1}{2}ml\sin\varphi\dot{\varphi}^2\right]\cdot$$

$$\cdot\delta x dt+\left[\left(\frac{1}{2}ml\cos\varphi\dot{x}+\frac{1}{3}ml^2\dot{\varphi}\right)\delta\varphi\right]_{t_0}^{t_1}-$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{1}{2}ml\cos\varphi\ddot{x}-\frac{1}{2}ml\sin\varphi\dot{\varphi}\dot{x}+\frac{1}{3}ml^2\ddot{\varphi}\right)\delta\varphi dt-$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{1}{2}ml\sin\varphi\dot{x}\dot{\varphi}+\frac{1}{2}mgl\sin\varphi\right)\delta\varphi dt \tag{4}$$

由于 $\delta x(t_0)=\delta x(t_1)=0$

$\delta\varphi(t_0)=\delta\varphi(t_1)=0$

故（4）式又可表示为

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}Ldt=-\int_{t_0}^{t_1}\left\{\left[\left(m+\frac{3}{2}M\right)\ddot{x}+\frac{1}{2}ml\cos\varphi\ddot{\varphi}-\frac{1}{2}ml\sin\varphi\dot{\varphi}^2\right]\delta x+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{2}ml\cos\varphi\ddot{x}+\frac{1}{3}ml^2\ddot{\varphi}+\frac{1}{2}mgl\sin\varphi\right)\delta\varphi\right\}dt$$

由哈密顿原理

$$\delta S=\delta\int_{t_0}^{t_1}Ldt=0$$

得 $\int_{t_0}^{t_1}\left\{\left[\left(m+\frac{3}{2}M\right)\ddot{x}+\frac{1}{2}ml\cos\varphi\ddot{\varphi}-\frac{1}{2}ml\sin\varphi\dot{\varphi}^2\right]\delta x+\right.$

$$+\left(\frac{1}{2}ml\cos\varphi\ddot{x}+\frac{1}{3}ml^2\ddot{\varphi}+\frac{1}{2}mgl\sin\varphi\right)\delta\varphi\Big\}dt=0$$

因为上述的积分范围是任意的，且 δx 与 $\delta\varphi$ 为彼此独立又在积分上下限上的值为零，所以得 δx 与 $\delta\varphi$ 前的系数应为零，即得

$$\begin{cases}\left(m+\frac{3}{2}M\right)\ddot{x}+\frac{1}{2}ml\cos\varphi\ddot{\varphi}-\frac{1}{2}ml\sin\varphi\dot{\varphi}^2=0\\ \frac{1}{2}ml\cos\varphi\ddot{x}+\frac{1}{3}ml^2\ddot{\varphi}+\frac{1}{2}mgl\sin\varphi=0\end{cases}$$

或

$$\begin{cases}\frac{2m+3M}{ml}\ddot{x}+\ddot{\varphi}\cos\varphi-\dot{\varphi}^2\sin\varphi=0\\ \frac{2}{3}l\ddot{\varphi}+\ddot{x}\cos\varphi+g\sin\varphi=0\end{cases}$$

例11 试用哈密顿原理来研究落体偏东的问题。

解：设一质量为 m 的质点在北半球纬度为 λ 的 P 点上，以速度 $\mathbf{V}_r$ 相对于地球运动，ω 为地球自转的角速度。若选如图4.14所示的 $Pxyz$ 坐标系固联在地球上为运动坐标系时，那么

$$\omega=-\omega\cos\lambda\mathbf{i}+\omega\sin\lambda\mathbf{k} \qquad (1)$$

$$\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k} \qquad (2)$$

$$\mathbf{V}_r=\dot{x}\mathbf{i}+\dot{y}\mathbf{j}+\dot{z}\mathbf{k} \qquad (3)$$

由相对运动速度公式得

$$\mathbf{V}=\mathbf{V}_r+\omega\times\mathbf{r} \qquad (4)$$

把（1）式、（2）式以及（3）式同时代入（4）式便得

$$\mathbf{V}=(\dot{x}-\omega y\sin\lambda)\mathbf{i}+(\dot{y}+\omega z\cos\lambda+\omega x\sin\lambda)\mathbf{j}+(\dot{z}-\omega y\cos\lambda)\mathbf{k} \qquad (5)$$

图4.14

于是，质点的动能为

$$T=\frac{1}{2}m[(\dot{x}-\omega y\sin\lambda)^2+(\dot{y}+\omega z\cos\lambda+\omega x\sin\lambda)^2+(\dot{z}-\omega y\cos\lambda)^2]$$

若选地球表面 P 点为势能的参考点时，那么质点的势能为

$$V=mg_\lambda z$$

显然，质点具有三个自由度，故选 x、y、z 为相应的广义坐标，因而，质点的拉格朗日函数为

$$L=T-V=\frac{1}{2}m[(\dot{x}-\omega y\sin\lambda)^2+(\dot{y}+\omega z\cos\lambda+\omega x\sin\lambda)^2+(\dot{z}-\omega y\cos\lambda)^2]-mg_\lambda z$$

那么

$$\delta\int_{t_0}^{t_1} Ldt=\int_{t_0}^{t_1}\delta Ldt$$

$$=\int_{t_0}^{t_1} m[(\dot{x}-\omega y\sin\lambda)(\delta\dot{x}-\omega\sin\lambda\delta y)+(\dot{y}+\omega z\cos\lambda+\omega x\sin\lambda)(\delta\dot{y}+$$

$$+\omega\cos\lambda\delta z+\omega\sin\lambda\delta x)+(\dot{z}-\omega y\cos\lambda)(\delta\dot{z}-\omega\cos\lambda\delta y)-g_\lambda\delta z]dt$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}[m(\dot{x}-\omega y\sin\lambda)\delta\dot{x}-m\omega\sin\lambda(\dot{x}-\omega y\sin\lambda)\delta y+m(\dot{y}+\omega z\cos\lambda+$$

$$+\omega x\sin\lambda)\delta\dot{y}+m(\dot{y}+\omega z\cos\lambda+\omega x\sin\lambda)\omega\cos\lambda\delta z+(\dot{y}+\omega z\cos\lambda+$$

$$+\omega x\sin\lambda)m\omega\sin\lambda\delta x+m(\dot{z}-\omega y\cos\lambda)\delta\dot{z}-m(\dot{z}-\omega y\cos\lambda)\omega\cos\lambda\delta y-$$

$$-mg_\lambda\delta z]dt$$

$$=\int_{t_0}^{t_1} m(\dot{x}-\omega y\sin\lambda)d(\delta x)+\int_{t_0}^{t_1} m(\dot{y}+\omega z\cos\lambda+\omega x\sin\lambda)\omega\sin\lambda\,\delta xdt+$$

$$+\int_{t_0}^{t_1} m(\dot{y}+\omega z\cos\lambda+\omega x\sin\lambda)\,d(\delta y)-\int_{t_0}^{t_1} m[(\dot{x}-\omega y\sin\lambda)\omega\sin\lambda+$$

$$+(\dot{z}-\omega y\cos\lambda)\omega\cos\lambda]\delta ydt+\int_{t_0}^{t_1} m(\dot{z}-\omega y\cos\lambda)d(\delta z)+$$

$$+\int_{t_0}^{t_1} m[(\dot{y}+\omega z\cos\lambda+\omega x\sin\lambda)\omega\cos\lambda-g_\lambda]\delta zdt$$

$$=\Big[m(\dot{x}-\omega y\sin\lambda)\,\delta x\Big]_{t_0}^{t_1}-\int_{t_0}^{t_1} m(\ddot{x}-\omega\dot{y}\sin\lambda)\delta xdt+$$

$$+\int_{t_0}^{t_1} m(\dot{y}+\omega z\cos\lambda+\omega x\sin\lambda)\omega\sin\lambda\delta xdt+$$

$$+\Big[m(\dot{y}+\omega z\cos\lambda+\omega x\sin\lambda)\delta y\Big]_{t_0}^{t_1}-\int_{t_0}^{t_1} m(\ddot{y}+\omega\dot{z}\cos\lambda+\omega\dot{x}\sin a)\delta ydt-$$

$$-\int_{t_0}^{t_1} m[(\dot{x}-\omega y\sin\lambda)\omega\sin\lambda+(\dot{z}-\omega y\cos\lambda)\omega\cos\lambda]\delta ydt+$$

$$+\Big[m(\dot{z}-\omega y\cos\lambda)\,\delta z\Big]_{t_0}^{t_1}-\int_{t_0}^{t_1} m\,(\ddot{z}-\omega\dot{y}\cos\lambda)\delta zdt+$$

$$+\int_{t_0}^{t_1} m[(\dot{y}+\omega z\cos\lambda+\omega x\sin\lambda)\omega\cos\lambda-g_\lambda]\delta zdt \tag{6}$$

由于　$\delta x(t_0)=\delta x(t_1)=0$

$\delta y(t_0)=\delta y(t_1)=0$

$\delta z(t_0)=\delta z(t_1)=0$

所以（6）式又可表示为

$$\delta\int_{t_0}^{t_1} Ldt=-\int_{t_0}^{t_1}[m\,(\ddot{x}-2\omega\dot{y}\sin\lambda-\omega^2 z\sin\lambda\cos\lambda-\omega^2 x\sin^2\lambda)\delta x+$$

$$+m(\ddot{y}+2\omega\dot{x}\sin\lambda+2\omega\dot{z}\cos\lambda-\omega^2 y\sin^2\lambda-\omega^2 y\cos^2\lambda)\delta y+$$

$$+m\,(\ddot{z}-2\omega\dot{y}\cos\lambda-\omega^2 z\cos^2\lambda-\omega^2 x\sin\lambda\cos\lambda+g_\lambda)\delta z]dt$$

因此，由哈密顿原理

$$\delta S=\delta\int_{t_0}^{t_1} Ldt=0$$

得$\int_{t_0}^{t_1}[m(\ddot{x}-2\omega\dot{y}\sin\lambda-\omega^2 z\sin\lambda\cos\lambda-\omega^2 x\sin^2\lambda)\delta x+m(\ddot{y}+2\omega\dot{x}\sin\lambda+$

$+2\omega\dot{z}\cos\lambda-\omega^2 y\sin^2\lambda-\omega^2 y\cos^2\lambda)\delta y+m(\ddot{z}-2\omega\dot{y}\cos\lambda-$

$-\omega^2 z\cos^2\lambda-\omega^2 x\sin\lambda\cos\lambda+g_\lambda)\delta z]dt=0$

由于上述积分的范围是任意的，又δx，δy，δz是彼此独立且在积分的上下限的值为零，因此得δx，δy，δz前的系数为零。

即
$$\begin{cases} m(\ddot{x}-2\omega\dot{y}\sin\lambda-\omega^2 z\sin\lambda\cos\lambda-\omega^2 x\sin^2\lambda)=0 \\ m(\ddot{y}+2\omega\dot{x}\sin\lambda+2\omega\dot{z}\cos\lambda-\omega^2 y\sin^2\lambda-\omega^2 y\cos^2\lambda)=0 \\ m(\ddot{z}-2\omega\dot{y}\cos\lambda-\omega^2 z\cos^2\lambda-\omega^2 x\sin\lambda\cos\lambda+g_\lambda)=0 \end{cases} \tag{7}$$

上述方程组就是在地球自转效应下,质点仅受重力作用的运动微分方程。考虑到地球的自转角速度 $\omega=7.27\times10^{-5}$ 弧度秒$^{-1}$ 是很小的，同时尽管质点相对于地球有相对运动，但质点离地轴的距离的变化，一般都并不太大，故惯性离心力的效应只要用重力来代替引力就可以了。于是，方程组（7）便变为

$$\begin{cases} \ddot{x}=2\omega\dot{y}\sin\lambda \\ \ddot{y}=-2\omega(\dot{x}\sin\lambda+\dot{z}\cos\lambda) \\ \ddot{z}=2\omega\dot{y}\cos\lambda-g \end{cases} \tag{8}$$

现在，我们利用方程组（8）式来研究落体的偏东问题。假定，质点从有限的高度h处自由下落，即$t=0$时，$x=y=0$，$z=h$；$\dot{x}=\dot{y}=\dot{z}=0$。那么，我们采用逐次逼近法来解微分方程组（8）。

首先，把方程组（8）积分一次得：

$$\begin{cases} \dot{x}=2\omega y\sin\lambda+C_1 \\ \dot{y}=-2\omega(z\cos\lambda+x\sin\lambda)+C_2 \\ \dot{z}=-gt+2\omega y\cos\lambda+C_3 \end{cases}$$

把初始条件$t=0$；$x=y=0$，$z=h$；$\dot{x}=\dot{y}=\dot{z}=0$代入上述方程组，便得积分常数$C_1=C_3=0$，$C_2=2\omega h\cos\lambda$。于是，上述方程组就变为

$$\begin{cases} \dot{x}=2\omega y\sin\lambda \\ \dot{y}=-2\omega(z\cos\lambda+x\sin\lambda)+2\omega h\cos\lambda \\ \dot{z}=-gt+2\omega y\cos\lambda \end{cases} \tag{9}$$

由于ω是很小的，所以第一次近似时，可以把ω视为零。因此，方程组（9）就变为

$$\begin{cases} \dot{x}=0 \\ \dot{y}=0 \\ \dot{z}=-gt \end{cases}$$

把上述方程组积分一次并代入初始条件便得第一次近似解

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=h-\frac{1}{2}gt^2 \end{cases} \tag{10}$$

方程组（10）便是没有考虑地球的自转效应下的通常的自由落体的运动规律。

把第一次近似解的结果（即方程组(10)）代入方程组（9）得

$$\begin{cases} \dot{x}=0 \\ \dot{y}=\omega gt^2\cos\lambda \\ \dot{z}=-gt \end{cases}$$

把上述方程组积分一次，并代入初始条件便得第二次近似解：

$$\begin{cases} x=0 \\ y=\frac{1}{3}\omega gt^3\cos\lambda \text{——意味着落体偏东。} \\ z=h-\frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

因此，当质点自高度为h的地方自由下落到地面时，其偏东的数值为

$$y=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{8h^3}{g}}\,\omega\cos\lambda \quad (z=0)$$

例12. 一园柱质量为M、半径为r，回转半径为k，放在完全光滑的斜面上，斜面与水平成α角。园柱外卷以可以弯曲而无重量的绳子，此绳子沿着斜面向上经过一质量可以忽略的固定滑轮，并在其端悬一质量为m的重物。试用哈密顿原理求：（1）园柱和重物的运动；（2）当园柱仅有转动时的条件；（3）当重物停止不动时的条件。

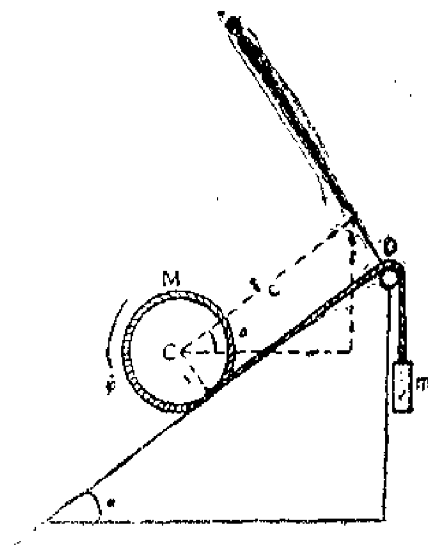


图4.15

解： 由于系统具有二个自由度，故选园柱的质心C的坐标ξ_c与园柱绕过其质心C的转动轴的转角φ为相应的广义坐标，如图4.15所示。于是，系统的动能可表示为

$$T=\frac{1}{2}M\dot{\xi}_c^2+\frac{1}{2}Mk^2\dot{\varphi}^2+\frac{1}{2}m\dot{\xi}_c^2$$

式中$\dot{\xi}_c$为园柱质心C沿斜面方向的速度，$\dot{\varphi}$为园柱绕过质心C的转动轴的转动角速度，$\dot{\xi}_m$为重物m的运动速度。

由运动的约束条件可得：

$$\dot{\xi}_m = r\dot{\varphi} - \dot{\xi}_c$$

故上述系统的动能又可表示为

$$T = \frac{1}{2}M\dot{\xi}_c^2 + \frac{1}{2}Mk^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m(r\dot{\varphi} - \dot{\xi}_c)^2$$

若选取O点为系统势能的参考点，那么系统的势能为

$$V = -Mg(\xi_c\sin\alpha - r\cos\alpha) - mg(r\varphi - \xi_c) \tag{2}$$

于是，系统的拉格朗日函数为

$$L = T - V = \frac{1}{2}M\dot{\xi}_c^2 + \frac{1}{2}Mk^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m(r\dot{\varphi} - \dot{\xi}_c)^2 + \\ + Mg(\xi_c\sin\alpha - r\cos\alpha) + mg(r\varphi - \xi_c) \tag{3}$$

因此

$$\begin{aligned}
\delta\int_{t_0}^{t_1} L dt &= \int_{t_0}^{t_1} \delta L dt \\
&= \int_{t_0}^{t_1} [M\dot{\xi}_c\delta\dot{\xi}_c + Mk^2\dot{\varphi}\delta\dot{\varphi} + m(r\dot{\varphi} - \dot{\xi}_c)(\delta\dot{\varphi} - \delta\dot{\xi}_c) + \\
&\quad + Mg\delta\xi_c\sin\alpha + mgr\delta\varphi - mg\delta\xi_c]dt \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \{[(M+m)\dot{\xi}_c - mr\dot{\varphi}]\delta\dot{\xi}_c + [(Mk^2 + mr^2)\dot{\varphi} - mr\dot{\xi}_c]\delta\dot{\varphi} + \\
&\quad + [(M\sin\alpha - m)g\delta\xi_c + mgr\delta\varphi]\}dt \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \left[(M+m)\dot{\xi}_c - mr\dot{\varphi}\right] d(\delta\xi_c) + \int_{t_0}^{t_1} \left[(Mk^2 + mr^2)\dot{\varphi} - mr\dot{\xi}_c\right] d(\delta\varphi) \\
&\quad + \int_{t_0}^{t_1} (M\sin\alpha - m)g\delta\xi_c dt + \int_{t_0}^{t_1} mgr\delta\varphi dt \\
&= \left\{\left[(M+m)\dot{\xi}_c - mr\dot{\varphi}\right]\delta\xi_c\right\}_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \left[(M+m)\ddot{\xi}_c - mr\ddot{\varphi}\right]\delta\xi_c dt + \\
&\quad + \left\{\left[(Mk^2 + mr^2)\dot{\varphi} - mr\dot{\xi}_c\right]\delta\varphi\right\}_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \left[(Mk^2 + mr^2)\ddot{\varphi} - \right. \\
&\quad \left. - mr\ddot{\xi}_c\right]\delta\varphi dt + \int_{t_0}^{t_1} (M\sin\alpha - m)g\delta\xi_c dt + \int_{t_0}^{t_1} mgr\delta\varphi dt
\end{aligned} \tag{4}$$

由于 $\delta\xi_c(t_0) = \delta\xi_c(t_1) = 0$

$$\delta\varphi(t_0) = \delta\varphi(t_1) = 0$$

所以（4）式又可表示为

$$\delta\int_{t_0}^{t_1} L dt = -\int_{t_0}^{t_1} \{[(M+m)\ddot{\xi}_c - mr\ddot{\varphi} - (M\sin\alpha - m)g]\delta\xi_c + [(Mk^2 + mr^2)\ddot{\varphi} - \\ - mr\ddot{\xi}_c - mgr]\delta\varphi\}dt$$

由哈密顿原理

$$\delta s = \delta\int_{t_0}^{t_1} L dt = 0$$

得 $$\int_{t_0}^{t_1}\{[(M+m)\ddot{\xi}_c-mr\ddot{\varphi}-(M\sin\alpha-m)g]\delta\xi_c+$$

$$+[(Mk^2+mr^2)\ddot{\varphi}-mr\ddot{\xi}_c-mgr]\delta\varphi\}dt=0$$

由于上述的积分范围为任意的且$\delta\xi_c$与$\delta\varphi$为彼此独立又在积分的上下限上的数值为零，因此，得$\delta\xi_c$、$\delta\varphi$ 前为系数为零。

即
$$\begin{cases}(M+m)\ddot{\xi}_c-mr\ddot{\varphi}-(M\sin\alpha-m)g=0 & (5)\\ (Mk^2+mr^2)\ddot{\varphi}-mr\ddot{\xi}_c-mgr=0 & (6)\end{cases}$$

化（6）式得

$$\ddot{\varphi}=\frac{mr}{Mk^2+mr^2}\ddot{\xi}_c+\frac{mrg}{Mk^2+mr^2} \tag{7}$$

把（7）式代入（5）式得

$$(M+m)\ddot{\xi}_c-\frac{m^2r^2}{Mk^2+mr^2}\ddot{\xi}_c-\frac{m^2r^2g}{Mk^2+mr^2}-(M\sin\alpha-m)g=0$$

由于$Mk^2+mr^2\neq 0$，故上式可表示为

$$(Mk^2+mr^2)(M+m)\ddot{\xi}_c-m^2r^2\ddot{\xi}_c-m^2r^2g-(Mk^2+mr^2)(M\sin\alpha-m)g=0$$

经整理便得

$$\ddot{\xi}_c=\frac{mr^2\sin\alpha+(M\sin\alpha-m)k^2}{(M+m)k^2+mr^2}g \tag{8}$$

把（8）式代入（7）式得

$$\ddot{\varphi}=\frac{mrg}{Mk^2+mr^2}\left[\frac{mr^2\sin\alpha+(M\sin\alpha-m)k^2}{(M+m)k^2+mr^2}+1\right]$$

$$=\frac{mrg}{Mk^2+mr^2}\left[\frac{mr^2\sin\alpha+(M\sin\alpha-m)k^2+(M+m)k^2+mr^2}{(M+m)k^2+mr^2}\right]$$

$$=\frac{mrg}{Mk^2+mr^2}\left[\frac{mr^2(1+\sin\alpha)+Mk^2(1+\sin\alpha)}{(M+m)k^2+mr^2}\right]$$

$$=\frac{mr(1+\sin\alpha)g}{(M+m)k^2+mr^2} \tag{9}$$

于是， $$\ddot{\xi}_m=r\ddot{\varphi}-\ddot{\xi}_c$$

$$=\frac{mr^2(1+\sin\alpha)-mr^2\sin\alpha-(M\sin\alpha-m)k^2}{(M+m)k^2+mr^2}g$$

$$=\frac{mr^2-(M\sin\alpha-m)k^2}{(M+m)k^2+mr^2}g \tag{10}$$

将（8）式积分一次得

$$\dot{\xi}_c=\frac{mr^2\sin\alpha+(M\sin\alpha-m)k^2}{(M+m)k^2+mr^2}gt+C_1$$

当$t=0$时，$\dot{\xi}_c=0$，故有$C_1=0$，于是

$$\dot{\xi}_c=\frac{mr^2\sin\alpha+(M\sin\alpha-m)k^2}{(M+m)k^2+mr^2}gt \tag{11}$$

因此，圆柱仅有转动时的条件为

$$\dot{\varepsilon}_c = 0$$

即 $$mr^2\sin\alpha + (M\sin\alpha - m)k^2 = 0$$

或 $$\frac{m}{M} = \frac{k^2\sin\alpha}{k^2 - r^2\sin\alpha}$$

因此，圆柱仅有转动的条件为

$$\begin{cases} \dfrac{m}{M} = \dfrac{k^2\sin\alpha}{k^2 - r^2\sin\alpha} \\ k^2 > r^2\sin\alpha \quad \text{（在均质圆柱的情况下得}\alpha < 30°\text{）} \end{cases}$$

把（10）式积分一次得

$$\dot{\varepsilon}_m = \frac{mr^2 - (M\sin\alpha - m)k^2}{(M+m)k^2 + mr^2} gt + C_2$$

当$t=0$时，$\dot{\varepsilon}_m = 0$ 故有$C_2 = 0$，于是

$$\dot{\varepsilon}_m = \frac{mr^2 - (M\sin\alpha - m)k^2}{(M+m)k^2 + mr^2} gt \tag{14}$$

因此，重物停止不动的条件为

$$\dot{\varepsilon}_m = 0$$

即 $$mr^2 - (M\sin\alpha - m)k^2 = 0$$

或 $$\frac{m}{M} = \frac{k^2\sin\alpha}{k^2 + r^2}$$

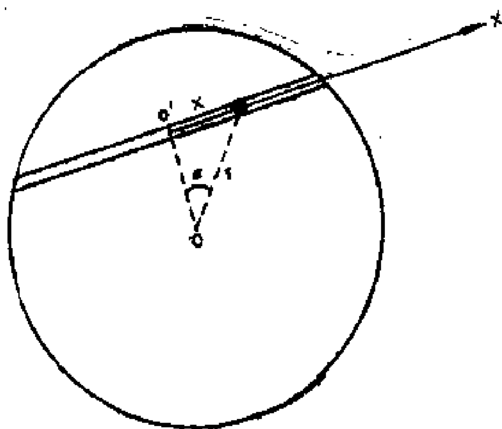


图4.16

例13. 一质量为m的质点，在地心引力作用下，沿着一个斜穿地球的光滑的直的隧道运动（如图4,16所示）。假定地球的半径为R、重力加速度为g，试用哈密顿原理证明此质点是作简谐振动，其振动周期$\tau = 2\pi\sqrt{\dfrac{R}{g}}$。

证： 由于质点具有一个自由度，故选x为相应的广义坐标，如图4.16所示。于是，

系统的动能为

$$T=\frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

为了计算质点的势能，我们先计算一下质点在地球内部所受地心引力的大小。我们可以把地球视为由无限多个球壳所迭加而成。那么，由普通物理知识得知：质量均匀分布的球壳，对其内部任何质点的引力之和是等于零的。而球壳对其外部任何质点的引力之和，相当于把整个球壳的质量集中在球心上的质点对球壳外该质点的引力。因此，处于离地心为r处的质点所受地心引力应为

$$\mathbf{f}_r=-\frac{GmM_r}{r^2}\cdot\frac{\mathbf{r}}{r} \qquad (1)$$

式中M_r是半径为r时地球部份的质量。即

$$M_r=\frac{4}{3}\pi r^3\rho \qquad (2)$$

式中ρ为地球的密度。把（2）式代入（1）式即得

$$\mathbf{f}_r=-\frac{4}{3}\pi G\rho m r\cdot\frac{\mathbf{r}}{r} \qquad (3)$$

由此可见，在地球内部，质点所受地心的引力是与质点到地心的距离成正比。故有

$$\mathbf{f}_x=\mathbf{f}_r\sin\alpha=-\frac{4}{3}\pi G\rho m r\sin\alpha\cdot\frac{\mathbf{r}}{r}=-\frac{4}{3}\pi G\rho m x\cdot\frac{\mathbf{x}}{x}$$

若选0′为势能的参考点时，那么在x处质点的引力势能为

$$\begin{aligned}V&=-\int_0^x\mathbf{f}_x\cdot d\mathbf{x}\\&=-\int_0^x-\frac{4}{3}\pi G\rho m x\cdot\frac{\mathbf{x}}{x}\cdot d\mathbf{x}\\&=\frac{4}{3}\pi G\rho m\int_0^x x\,dx\\&=\frac{2}{3}\pi G\rho m x^2\end{aligned} \qquad (4)$$

于是，质点的拉格朗日函数为

$$L=T-V=\frac{1}{2}m\dot{x}^2-\frac{2}{3}\pi G\rho m x^2 \qquad (5)$$

故

$$\begin{aligned}\delta\int_{t_0}^{t_1}L\,dt&=\int_{t_0}^{t_1}\delta L\,dt\\&=\int_{t_0}^{t_1}\left(m\dot{x}\delta\dot{x}-\frac{4}{3}m\pi G\rho x\delta x\right)dt\\&=\int_{t_0}^{t_1}m\dot{x}d(\delta x)-\int_{t_0}^{t_1}\frac{4}{3}m\pi G\rho x\delta x\,dt\\&=\Big[m\dot{x}\delta x\Big]_{t_0}^{t_1}-\int_{t_0}^{t_1}m\ddot{x}\delta x\,dt-\int_{t_0}^{t_1}\frac{4}{3}m\pi G\rho x\delta x\,dt\end{aligned} \qquad (6)$$

由于 $\delta x(t_0)=\delta x(t_1)=0$，所以（6）式又可表示为

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}L\,dt=-\int_{t_0}^{t_1}\left(m\ddot{x}+\frac{4}{3}m\pi G\rho x\right)\delta x\,dt$$

由哈密顿原理

$$\delta s=\delta\int_{t_0}^{t_1}Ldt=0$$

得
$$\int_{t_0}^{t_1}(m\ddot{x}+\frac{4}{3}m\pi G\rho x)\delta x dt=0$$

因为上述积分的范围是任意的，δx也是任意的，且在积分的上下限上的数值为零，所以得δx前的系数应为零。即

$$m\ddot{x}+\frac{4}{3}m\pi G\rho x=0 \tag{7}$$

当然，若不采用变分原理，而是直接根据牛顿第二定律，便立即可得（7）式。由于在地球的表面上，地心对质点的引力恰好等于质点的重量。即

$$\frac{Gm\cdot\frac{4}{3}\pi R^3\rho}{R^2}=mg$$

故有
$$\frac{4}{3}\pi G\rho=\frac{g}{R} \tag{8}$$

把（8）式代入（7）式得

$$\ddot{x}+\frac{g}{R}x=0 \tag{9}$$

此方程就是一个谐振方程，其通解为

$$x=A\sin\left(\sqrt{\frac{g}{R}}t+\alpha\right) \tag{10}$$

而振动周期为$\tau=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$　故得证。

例14. 一物体以初速V_0从地球表面铅垂向上发射，试用哈密顿原理求：

（1）物体离地球表面为H距离时物体的速度。

（2）$H\to\infty$时物体的极限速度。

（3）若此物体永不回来，所需的V_0的最小值。

解： 由于质点具有一个自由度，故选x为相应的广义坐标，如图4.17所示。于是，物体的动能为：

$$T=\frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

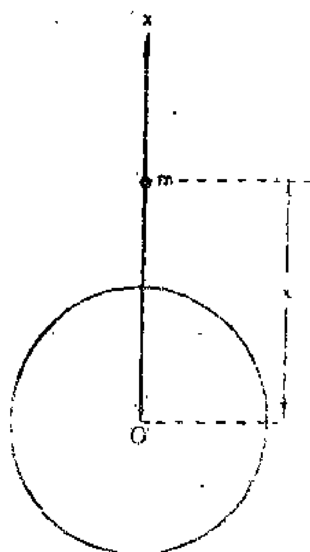


图4.17

而物体的引力势能为

$$V=-\int_{\infty}^{x}-\frac{GmM}{x^2}dx=-\frac{GmM}{x}$$

式中M为地球的质量，G为万有引力系数。于是，物体的拉格朗日函数为

$$L=T-V=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{GmM}{x}$$

故 $$\delta\int_{t_0}^{t_1}Ldt=\int_{t_0}^{t_1}\delta Ldt$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}(m\dot{x}\delta\dot{x}-\frac{GmM}{x^2}\delta x)dt$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}m\dot{x}d(\delta x)-\int_{t_0}^{t_1}\frac{GmM}{x^2}\delta xdt$$

$$=\Big[m\dot{x}\delta x\Big]_{t_0}^{t_1}-\int_{t_0}^{t_1}m\ddot{x}\delta xdt-\int_{t_0}^{t_1}\frac{GmM}{x^2}\delta xdt$$

因为 $\delta x(t_0)=\delta x(t_1)=0$，所以上述积分式子又可表示为

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}Ldt=-\int_{t_0}^{t_1}(m\ddot{x}+\frac{GmM}{x^2})\delta xdt$$

由哈密顿原理

$$\delta s=\delta\int_{t_0}^{t_1}Ldt=0$$

得 $$\int_0^1(m\ddot{x}+\frac{GmM}{x^2})\delta xdt=0$$

由于上述积分的范围是任意的，δx也任意且在积分的上下限的值为零。所以，得δx前的系数应为零。即

$$m\ddot{x}+\frac{GmM}{x^2}=0$$

或者 $$\ddot{x}=-\frac{GM}{x^2} \qquad (\;.\;)$$

当然，若不采用变分原理，而是直接根据牛顿第二定律便立即可得上述式子。

(1) 当$x=R+H$时，物体的速度：

由于 $\ddot{x}=\dot{x}\dfrac{d\dot{x}}{dx}$ 故(1)式又可表示为

$$\dot{x}d\dot{x}=-\frac{GM}{x^2}dx$$

积分上式 $$\int_{V_0}^{V}\dot{x}d\dot{x}=-\int_R^{R+H}\frac{GM}{x^2}dt$$

得 $$\frac{1}{2}(V^2-V_0^2)=GM(\frac{1}{R+H}-\frac{1}{R})$$

故有 $$V^2=V_0^2-\frac{2GMH}{R(R+H)}$$

由于在地球表面上：

$$\frac{GmM}{R^2}=mg$$

所以 $$GM=R^2g$$

因此， $$V=\sqrt{V_0^2-\frac{2RHg}{R+H}}$$

（2）当$H \longrightarrow \infty$时，$\lim\limits_{H\to\infty}\dfrac{H}{(R+H)}=1$　故得极限速度为

$$V_{极限}=\sqrt{V_0^2-2Rg}$$

（3）若永不回来，$V_0^2-2Rg\geqslant 0$　　故得　$V_0^2\geqslant 2Rg$，因此　$V_0=\sqrt{2Rg}$称为逃逸速度。

例15. 直管AB长l，以等角速ω在水平面内绕固定点0转动，而$0A=R_1$，$0B=R_2$，一质量为m的小球M在管内不受摩擦而运动，在初瞬时，球在A点，其相对初速为V_{r0}。试用哈密顿原理求球的相对运动。并求球离管所需的时间t_1及在此瞬时球的相对速度V_{r1}。

解： 选如图4.18所示的$0'xy$坐标系为运动坐标系。那么由相对运动的速度公式得小球的绝对速度为

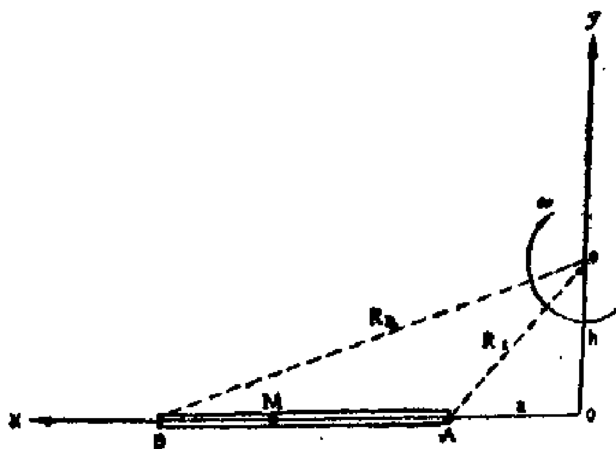


图4.18

$$\begin{aligned}V&=V_0'+\omega\times\mathbf{r}+V_r\\&=\omega h\mathbf{i}+\omega\mathbf{K}\times(x\mathbf{i})+\dot{x}\mathbf{i}\\&=(\dot{x}+\omega h)\mathbf{i}+\omega x\mathbf{j}\end{aligned}$$

于是，小球M的动能为

$$T=\frac{1}{2}mV^2=\frac{1}{2}m[(\dot{x}+\omega h)^2+\omega^2x^2] \qquad (1)$$

若选直管AB所在的水平面为势能的参考面时，那么小球M的势能为零。即

$$V=0 \qquad (2)$$

故选x为广义坐标，于是，小球M的拉格朗日函数为

$$L=T-V=\frac{1}{2}m[(\dot{x}+\omega h)^2+\omega^2x^2] \qquad (3)$$

$$故\ \delta\int_{t_0}^{t_1}Ldt=\int_{t_0}^{t_1}\delta Ldt$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}[m(\dot{x}+\omega h)\delta\dot{x}+m\omega^2x\delta x]dt$$

$$=\int_{t_0}^{t_1} m(\dot{x}+\omega h)d(\delta x)+\int_{t_0}^{t_1} m\omega^2 x\delta x dt$$

$$=[m(\dot{x}+\omega h)\delta x]_{t_0}^{t_1}-\int_{t_0}^{t_1}(m\ddot{x})\delta x dt+\int_{t_0}^{t_1}(m\omega^2 x)\delta x dt \qquad (4)$$

由于　　$\delta x(t_0)=\delta x(t_1)=0$ 所以（4）式又可表示为

$$\delta\int_{t_0}^{t_1} L dt=-\int_{t_0}^{t_1}(m\ddot{x}-m\omega^2 x)\delta x dt$$

由哈密顿原理

$$\delta S=\delta\int_{t_0}^{t_1} L dt=0$$

得

$$\int_{t_0}^{t_1} m(\ddot{x}-\omega^2 x)\delta x dt=0$$

因为上述积分的范围是任意的，且δx也是任意的又在积分的上下限上的数值为零，所以得δx前面的系数为零。即

$$m(\ddot{x}-\omega^2 x)=0$$

或　　$$\ddot{x}-\omega^2 x=0 \qquad (5)$$

其特征方程为$\lambda^2-\omega^2=0$，故有$\lambda=\pm\omega$

于是，方程（5）的通解为

$$x=C_1 e^{\omega t}+C_2\omega e^{-\omega t} \qquad (6)$$

$$\dot{x}=C_1\omega e^{\omega t}-C_2\omega e^{\omega t} \qquad (7)$$

当$t=0$时，$x=a$，$\dot{x}=V_{r0}$故得

$$\begin{cases} C_1+C_2=a \\ (C_1-C_2)\omega=V_{r0} \end{cases}$$

联立解上述方程组得：

$$C_1=\frac{1}{2\omega}(a\omega+V_{r0})$$

$$C_2=\frac{1}{2\omega}(a\omega-V_{r0})$$

于是，（6）式又可表为

$$x=\frac{1}{2\omega}[(a\omega+V_{r0})e^{\omega t}+(a\omega-V_{r0})e^{-\omega t}] \qquad (8)$$

（7）式也可表示为

$$\dot{x}=\frac{1}{2}[(a\omega+V_{r0})e^{\omega t}-(a\omega-V_{r0})e^{-\omega t}] \qquad (9)$$

由题设当$t=t_1$时：$x=l+a$，$\dot{x}=v_{r1}$，故得

$$\begin{cases} \frac{1}{2\omega}[(a\omega+v_{r0})e^{\omega t_1}+(a\omega-v_{r0})e^{\omega t_1}]=l+a & (10) \\ v_r=\frac{1}{2}[(a\omega+v_{r0})e^{\omega t_1}-(a\omega-v_{r0})e^{-\omega t_1}] & (11) \end{cases}$$

化（11）式得

$$(a\omega-v_{r0})e^{-\omega t_1}=(a\omega+v_{r0})e^{\omega t_1}-2v_{r1} \qquad (12)$$

把（12）式代入（11）式并经整理得

$$\frac{\omega(l+a)+v_r}{a\omega+v_{r0}}=e^{\omega t_1}$$

把上述方程两边同时取对数得

$$t_1=\frac{1}{\omega}\ln\left[\frac{\omega(l+a)+v_{r1}}{a\omega+v_{r0}}\right] \qquad (13)$$

把（13）式代入（11）式并经整理便得

$$\begin{aligned} v_{r1}^2&=\omega^2(l+a)^2-\omega^2a^2+v_{r0}^2\\ &=\omega^2[(R_2^2-h^2)-(R_1^2-h^2)]+v_{r0}^2\\ &=\omega^2[R_2^2-R_1^2]+v_{r0}^2 \end{aligned}$$

或者 $$v_{r1}=\sqrt{\omega^2(R_2^2-R_1^2)+v_{r0}^2}$$

由图示可清楚地看到

$$\begin{aligned} (l+a)^2&=R_2^2-h^2\\ &=R_2^2-(R_1^2-a^2)\\ &=R_2^2-R_1^2+a^2 \end{aligned}$$

因此 $$l^2+2la+a^2=R_2^2-R_1^2+a^2$$

故有 $$a=\frac{R_2^2-R_1^2-l^2}{2l}$$

二、莫培督－拉格朗日最小作用量原理

1744年，莫培督为了用微粒说来理解光的本性，而提出了一个原理：对质点的真实运动来说，沿着轨道上任意两点（A,B）间的线积分 $\int_A^B vds$ 与沿着通过同样两点的其他曲线的积分比较起来是极小。莫培督称积分 $\int_A^B vds$ 为作用量，而称此原理为最小作用量原理。可是，十分遗憾他没给出任何的证明。直到1760年，才由拉格朗日给出了严格的数学证明，并加以推广，形成了莫培督－拉格朗日最小作用量原理。

1．最小作用量原理的表述

若所研究的质点组是由N个质点所组成，受m个完整约束，具有n个自由度，相应的广义坐标为$q_1,q_2,\cdots,q_n$，且所受的主动力是具有势时，那么质点组在相同的约束条件下，从状态A到达状态B的真实运动与具有同样能量的从状态A到达状态B的其他所有运动学上的可能运动中唯有真实运动的拉格朗日作用量具有极值。即

$$\Delta W=0 \qquad (4.64)$$

式中 $$W=\int_{t_0}^{t_k}2Tdt$$

称为**拉格朗日作用量**．其中 T 为质点组沿 C_k 轨道运动的动能．由于从状态 A 到达状态 B 所需的时间间隔（t_k-t_0）是随着不同的轨道而不同，因此，此处需采用全变分．

2．最小作用量原理的推导

由于质点组从状态 A 到达状态 B 沿任一轨道运动时，其能量均相同，即有

$$T+V=h$$

又质点组的拉格朗日函数为

$$L=T-V$$

故有 $\quad 2T=L+h$

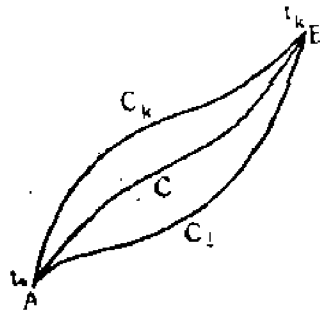


图4.19

于是

$$\Delta W=\Delta\int_{t_0}^{t_k}2T\,dt$$

$$=\Delta\int_{t_0}^{t_k}(L+h)dt \tag{4.65}$$

由全变分的定义得

$$\Delta\int_0^{t_k}(L+h)dt=\delta\int_0^{t_k}(L+h)dt+(L+h)\Delta t_k$$

$$\Delta\int_0^{t_0}(L+h)dt=\delta\int_0^{t_0}(L+h)dt+(L+h)\Delta t_0$$

将上述两式相减有

$$\Delta\int_{t_0}^{t_k}(L+h)dt=\delta\int_{t_0}^{t_k}(L+h)dt+(L+h)(\Delta t_k-\Delta t_0)$$

$$=\delta\int_{t_0}^{t_k}(L+h)dt+\Big[(L+h)\Delta t\Big]_{t_0}^{t_k} \tag{4.66}$$

把（4.66）式代入（4.65）式得

$$\Delta W=\Delta\int_{t_0}^{t_k}(L+h)dt$$

$$=\delta\int_{t_0}^{t_k}(L+h)dt+\Big[(L+h)\Delta t\Big]_{t_0}^{t_k}$$

$$=\int_{t_0}^{t_k}(\delta L+\delta h)dt+\Big[(L+h)\Delta t\Big]_{t_0}^{t_k} \tag{4.67}$$

由于质点组从状态 A 到达状态 B，沿任何一轨道运动时，其能量均相同，且等于 h，故 $\delta h=0$。于是，上述积分式子又可表示为

$$\Delta W=\int_{t_0}^{t_k}\delta L dt+[(L+h)\Delta t]_{t_0}^{t_k}$$

$$=\int_{t_0}^{t_k}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i\right)dt+[(L+h)\Delta t]_{t_0}^{t_k} \tag{4.68}$$

对于真实运动，q_i应满足拉格朗日方程，因此，（4.68）式又可改写为

$$\Delta W=\int_{t_0}^{t_k}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i\right]dt+[(L+h)\Delta t]_{t_0}^{t_k}$$

$$=\int_{t_0}^{t_k}\sum_{i=1}^{n}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right)dt+[(L+h)\Delta t]_{t_0}^{t_k}$$

$$=\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right]_{t_0}^{t_k}+[(L+h)\Delta t]_{t_0}^{t_k}$$

$$=\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(\Delta q_i-\dot{q}_i\Delta t)\right]_{t_0}^{t_k}+[(L+h)\Delta t]_{t_0}^{t_k} \tag{4.69}$$

因为A点和B点是固定的，所以

$$\Delta q_i(t_0)=\Delta q_i(t_k)=0$$

于是，（4.69）式又可表示为

$$\Delta W=\left[-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\Delta t\right]_{t_0}^{t_k}+[(L+h)\Delta t]_{t_0}^{t_k}$$

$$=\left[\left(L+h-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right)\Delta t\right]_{t_0}^{t_k} \tag{4.70}$$

由于保守组的哈密顿函数

$$H=T+V=h\text{（常数）}$$

所以（4.70）式又可改写为

$$\Delta W=\left[\left(L+H-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right)\Delta t\right]_{t}^{t_k} \tag{4.71}$$

又因为　　$H=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i-L$

故（4.71）式中圆括号内的式子恒等于零．因此

$$\Delta W=0$$

得证．

3．由最小作用量原理导出拉格朗日方程

由于 $\Delta W=\Delta\int_{t_0}^{t_k}2Tdt$

$$=\Delta\int_{t_0}^{t_k}(L+h)dt$$

$$=\delta\int_{t_0}^{t_k}(L+h)dt+[(L+h)\Delta t]_{t_0}^{t_k}$$

$$=\int_{t_0}^{t_k}\delta Ldt+\int_{t_0}^{t_k}\delta hdt+[(L+h)\Delta t]_{t_0}^{t_k} \qquad (4.72)$$

由于质点组从状态A到达状态B，沿任一轨道运动时，其能量均相同，且等于h，即$\delta h=0$，于是，上述积分式子（4.72）又可表示为

$$\Delta W=\int_{t_0}^{t_k}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta\dot{q}_i\right)\right]dt+[(L+h)\Delta t]_{t_0}^{t_k}$$

$$=\int_{t_0}^{t_k}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i\right)dt+\sum_{i=1}^{n}\int_{t_0}^{t_k}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}d(\delta q_i)+[(L+h)\Delta t]_{t_0}^{t_k}$$

$$=\int_{t_0}^{t_k}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i\right)dt+\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right]_{t_0}^{t_k}-$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\int_{t_0}^{t_k}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i dt+[(L+h)\Delta t]_{t_0}^{t_k}$$

$$=\int_{t_0}^{t_k}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i\right]dt+$$

$$+\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(\Delta q_i-\dot{q}_i\Delta t)\right]_{t_0}^{t_k}+[(L+h)\Delta t]_{t_0}^{t_k} \qquad (4.73)$$

由于A、B为两固定端点，故有

$$\Delta q_i(t_0)=\Delta q_i(t_k)=0$$

所以（4.73）式又可改写为

$$\Delta W=\left[\left(L+h-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right)\Delta t\right]_{t_0}^{t_k}-\sum_{i=1}^{n}\int_{t_0}^{t_k}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}\right]\delta q_i dt$$

$$(4.74)$$

前面已经证明过

$$\left[\left(L+h-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right)\Delta t\right]_{t_0}^{t_k}=0$$

故（4.74）式又可表示为

$$\Delta W=-\sum_{i=1}^{n}\int_{t_0}^{t_k}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}\right]\delta q_i dt$$

由最小作用量原理得

$$\Delta W=0$$

即

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{t_0}^{t_k}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}\right]\delta q_i dt=0$$

由于上述积分的范围是任意的且 δq_i 是彼此独立的，所以 δq_i 前的系数应为零。即

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0\quad (i=1,2,\cdots\cdots,n)$$

故拉格朗日方程得证。

4．从一般的最小作用量原理导出莫培督的一个质点的最小作用量原理

由于一个质点运动的动能为

$$T=\frac{1}{2}mv^2$$

$$=\frac{1}{2}mv\cdot\frac{ds}{dt}$$

所以

$$\Delta W=\Delta\int_{t_0}^{t_k}2T dt$$

$$=\Delta\int_{t_0}^{t_k}mv ds$$

$$=m\Delta\int_{t_0}^{t_k}v ds$$

由一般的最小作用量原理

$$\Delta W=0$$

得

$$\Delta\int_{t_0}^{t_k}v ds=0$$

上式就是莫培督最早提出的一个质点的最小作用量原理的数学表达式。

在质点组不受任何外力的特殊情况下（即质点组作惯性运动），势能 $V=$常量（无论对那一条运动的轨道）。又由于对任何的可能运动的轨道均具有相同的能量，因此，动能对所有可能运动的轨道也均保持不变。于是

$$\Delta\int_{t_0}^{t_k}2Tdt=\Delta(2T\int_{t_0}^{t_k}dt)$$

$$=\Delta[2T(t_k-t_0)]$$

$$=2T\Delta(t_k-t_0)$$

由最小作用量原理

$$\Delta W=\Delta\int_{t_0}^{t_k}2Tdt=0$$

故得

$$\Delta(t_k-t_0)=0$$

若令 $t_k-t_0=t$，那么上式又可表示为

$$\Delta t=0 \tag{4.75}$$

即质点组在不受任何外力的特殊情况下，从状态A到状态B的真实运动与具有同样能量的从状态A到达状态B的其他一切运动学上的可能运动中，唯有真实运动的时间取极小值。由于速度v对所有的轨道均相同，所以真实运动所走的路线为短程线。当然，此结论也可以这样来获得：

由于保守组的动能可表示为关于广义速度的齐二次函数，即

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j$$

所以

$$2T(dt)^2=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_jdtdt$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}dq_idq_j \tag{4.76}$$

另方面，由于保守组

$$T+V=h\text{（常量）}$$

$$2T=2(h-V) \tag{4.77}$$

把（4.77）式代入（4.76）式得

$$2(h-V)(dt)^2=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}dq_idq_j$$

或者

$$dt=\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}dq_idq_j}}{\sqrt{2(h-V)}} \tag{4.78}$$

于是，由最小作用量原理

$$\Delta W=\Delta\int_{t_0}^{t_k}2Tdt=0$$

得
$$\Delta\int_{q_{i0}}^{q_{ik}}2(h-V)\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}dq_idq_j}}{\sqrt{2(h-V)}}=0$$

即
$$\Delta\int_{q_{i0}}^{q_{ik}}\sqrt{2(h-V)}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}dq_idq_j}=0\tag{4.79}$$

若令
$$ds=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}dq_idq_j}$$

它表示n维曲线坐标q_i空间（即黎曼空间）中的弧元，那么（4.79）式又可表示为

$$\Delta\int_{q_{i0}}^{q_{ik}}\sqrt{2(h-V)}\,ds=0\tag{4.80}$$

称（4.80）式为**雅可俾形式的最小作用量原理**。当质点组在不受任何外力的情况下．势能V恒为常量，于是（4.80）式便改变为

$$\sqrt{2(h-V)}\,\Delta\int_{q_{i0}}^{q_{ik}}ds=0$$

即
$$\Delta\int_{q_{i0}}^{q_{ik}}ds=0\tag{4.81}$$

（4.81）式表明，当质点组在不受任何外力的情况下，通过端点q_{i0}与q_{ik}的一切运动学上的可能运动中，唯有真实运动在n维的黎曼空间中的弧长s取极小值．亦即，质点组从状态A到达状态B的真实运动与具有同样能量的从状态A到达状态B的其他一切运动学上的可能运动中，唯有真实运动在n维的曲线坐标q_i空间中所走的路线为最短（即短程线）。此结论与§4－3的例1中所述的一个质点在光滑水平面上作惯性运动时所得的结论完全相同．这就说明，哈密顿原理与最小作用量原理是从不同的角度来反映同一客观规律的。

（4.75）式的结果是17世纪法国数学家费尔马导出的，他并把它应用到光的折射现象上，而成为几何光学中著名的费尔马定理．即光线在空间中自p_0至p_1所经过的路线与其它可能的路线相比较，其真实路线所经过的时间最小．若用数学式子可表为

$$\Delta\int_{p_0}^{p_1}\frac{ds}{u}=0$$

式中u是光波速度，它随空间中介质的折射率n而变．把光子视为粒子，并将上式与一个质点的最小作用量原理的数学表式

$$\Delta\int_{t_0}^{t_k}vds=0$$

相比较。显然可得 $v\propto\frac{1}{u}$．因此，一个质点的力学问题，可以当作一条光线的几何光学

问题来求解；反之，几何光学的路线问题，也可以当成质点力学问题来求解。1924年，法国物理学家德布罗意也是根据这一光和粒子的平行关系，提出了物质波的假说，进而为1926年薛定谔建立波动力学奠定了基础。

5．最小作用量与哈密顿作用量的关系

由于哈密顿作用量

$$S=\int_{t_0}^{t_1} Ldt$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}(T-V)dt \tag{4.82}$$

考虑到质点组是保守组，故对某一轨道而言，机械能等于常量，即

$$T+V=h\ (\text{常量})$$

于是，（4.82）式又可表示为

$$S=\int_{t_0}^{t_1}(2T-h)dt$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}2Tdt-\int_{t_0}^{t_1}hdt \tag{4.83}$$

由于 t_1 是可变的，若设 $t_1=t$，$t_0=0$ 时，那么（4.83）式又可表示为

$$S=W-ht \tag{4.84}$$

例： 利用最小作用量原理的雅可俾形式证明质点在均匀重力场中运动的轨道为一抛物线。

证： 由于雅可俾形式的最小作用量原理

$$\Delta\int_{q_{i0}}^{q_{ik}}\sqrt{2(h-V)}\,ds=0$$

中不涉及到时间变量，只涉及到广义坐标 q_i，故全变分“Δ”可改为等时变分“δ”。于是，质量为m的质点在均匀的重力场中运动时，若选平面直角坐标 x，y 为广义坐标的话，那么最小作用量原理可表示为

$$\delta\int_{x_0}^{x_k}\sqrt{2(h-mgy)}\cdot\sqrt{1+y'^2}\,dx=0$$

此处 $F(y,y')=\sqrt{2(h-mgy)}\cdot\sqrt{1+y'^2}$

代入欧勒方程得

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{\sqrt{2(h-mgy)}\,y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right]+\frac{\sqrt{1+y'^2}\,mg}{\sqrt{2(h-mgy)}}=0$$

以 y' 乘上述方程各项得

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{\sqrt{2(h-mgy)}\,y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right]y'+\frac{\sqrt{1+y'^2}\,mgy'}{\sqrt{2(h-mgy)}}=0 \tag{4.85}$$

由于

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{\sqrt{2(h-mgy)}}{\sqrt{1+y'^2}}y'^2\right]=\frac{d}{dx}\left[\frac{\sqrt{2(h-mgy)}}{\sqrt{1+y'^2}}y'\right]y'+\frac{\sqrt{2(h-mgy)}y'y''}{\sqrt{1+y'^2}}$$

所以（4.85）式可改写为

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{\sqrt{2(h-mgy)}}{\sqrt{1+y'^2}}y'^2\right]-\frac{\sqrt{2(h-mgy)}}{\sqrt{1+y'^2}}y'y''+\frac{\sqrt{1+y'^2}mgy'}{\sqrt{2(h-mgy)}}=0 \tag{4.86}$$

因为

$$\frac{d}{dx}\left[\sqrt{2(h-mgy)}\cdot\sqrt{1+y'^2}\right]=\frac{\sqrt{2(h-mgy)}y'y''}{\sqrt{1+y'^2}}-\frac{\sqrt{1+y'^2}mgy'}{\sqrt{2(h-mgy)}}$$

故（4.86）式又可表示为

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{\sqrt{2(h-mgy)}y'^2}{\sqrt{1+y'^2}}\right]-\frac{d}{dx}\left[\sqrt{2(h-mgy)}\cdot\sqrt{1+y'^2}\right]=0$$

亦即 $$\frac{d}{dx}\left[\frac{\sqrt{2(h-mgy)}y'^2}{\sqrt{1+y'^2}}-\sqrt{2(h-mgy)}\cdot\sqrt{1+y'^2}\right]=0$$

于是 $$\frac{\sqrt{2(h-mgy)}y'^2}{\sqrt{1+y'^2}}-\sqrt{2(h-mgy)}\cdot\sqrt{1+y'^2}=\text{常数}$$

即 $$\frac{\sqrt{2(h-mgy)}}{\sqrt{1+y'^2}}=\sqrt{C_1}$$

式中 C_1 为积分常数，展开上式并经整理得

$$y'^2=\left(\frac{2h}{C_1}-1\right)-\frac{2mg}{C_1}y$$

即 $$\frac{dy}{dx}=\sqrt{\left(\frac{2h}{C_1}-1\right)-\frac{2mg}{C_1}y}$$

或者 $$\frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{2h}{C_1}-1\right)-\frac{2mg}{C_1}y}}=dx$$

积分上式

$$\int\frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{2h}{C_1}-1\right)-\frac{2mg}{C_1}y}}=\int dx$$

得 $$-\frac{C_1}{mg}\sqrt{\left(\frac{2h}{C_1}-1\right)-\frac{2mg}{C_1}y}=x+C_2$$

把上述方程两边平方便得

$$\left(\frac{2h}{C_1}-1\right)-\frac{2mgy}{C_1}=\frac{m^2g^2}{C_1^2}(x+C_2)^2$$

于是 $$y=-\frac{mg}{2C_1}(x+C_2)^2+\left(\frac{h}{mg}-\frac{C_1}{2mg}\right)$$

此为抛物线方程，式中 C_1，C_2 为积分常数，由通过 $A(x_0,y_0)$，$B(x_k,y_k)$ 两端点来确定。

习　　题

1. 已知质点组的质量为 m_i（$i=1,2,\cdots,n$），坐标为（x_i, y_i, z_i），在质点上作用着的是以 $-V$ 为力函数的力 $\mathbf{F}_i$，而函数 V 是只依赖于点的坐标的，试用哈密顿原理导出质点组的运动微分方程式。

（答：$\begin{cases} m_i\ddot{x}_i=F_{xi} \\ m_i\ddot{y}_i=F_{yi} \\ m_i\ddot{z}_i=F_{zi} \end{cases}$　（$i=1,2,\cdots,n$））

2. 试用哈密顿原理导出弹簧振子的运动微分方程。

（答：$\ddot{x}+\frac{k}{m}x=0$，式中 k 为弹簧的刚性系数，m 为振子的质量）。

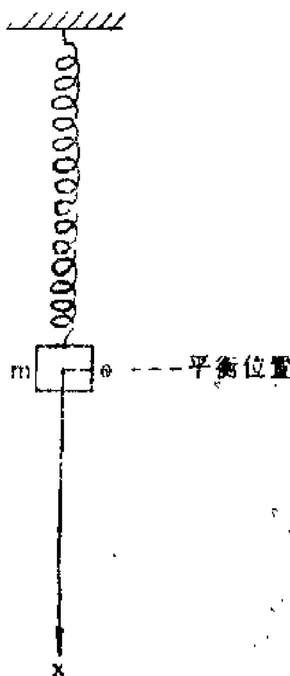
3. 试用哈密顿原理导出行星运动的微分方程。

（答：$\begin{cases} m(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)=-\frac{km}{r^2} \\ mr^2\dot{\theta}=\text{常数} \end{cases}$

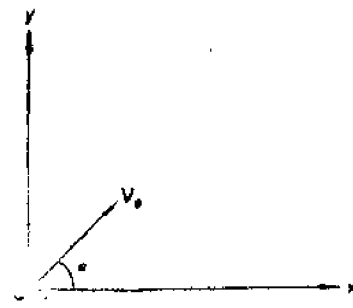
式中 m 为行星的质量，k 为太阳的高斯常数）。

4. 质量为 m 的质点，在重力场中以初速 $\mathbf{v}_0$ 和水平线成 α 角抛射。试用哈密顿原理求该质点的运动。

（答：$x=v_0\cos\alpha t$，　$y=v_0\sin\alpha t-\frac{1}{2}gt^2$）



题 2 图



题 4 图

5．带电粒子（电荷 q、静止质量 m_0）在电磁场（**E**，**B**）中运动。已知其拉格朗日函数为

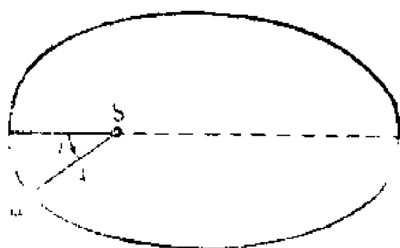
$$L=-m_0c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}-q(\varphi-\mathbf{v}\cdot\mathbf{A})$$

其中 φ 为标势，**A** 为矢势，试用哈密顿原理确定该质点在电磁场中运动的相对论运动方程。

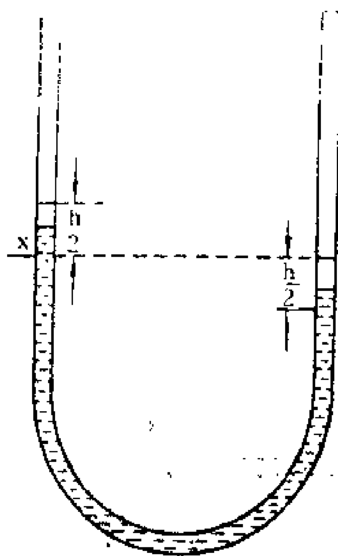
（答：$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\mathbf{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)=q(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B})$）

6．一U形管，断面积 $\sigma=1$ 厘米^2，内盛液体，液体单位体积的质量为 ρ。原来液体两表面高度差为 h，此时液体运动的速度为零。由于重力的影响，液体在管内运动。设管与液体之间没有摩擦力，试用哈密顿原理求液面的运动。

（答：$x=\frac{h}{2}\cos\omega t$，谐振周期 $\tau=2\pi\sqrt{\frac{M}{2\sigma\rho g}}$）



题3图



题6图

7．试用哈密顿原理解§2－2中的例题7．

8．试用哈密顿原理解§2－2中的例题13．

9．试用哈密顿原理解第二章中的习题9．

10．试用哈密顿原理解第二章中的习题14．

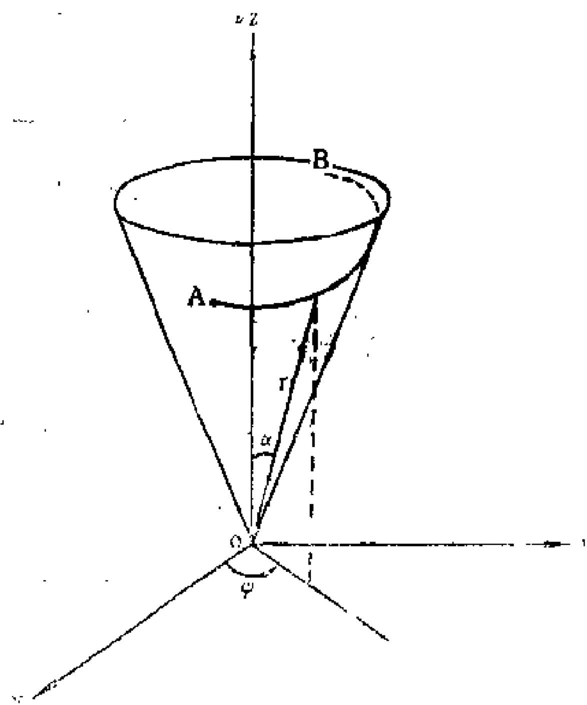
11．试用哈密顿原理解第二章中的习题22．

12．试用哈密顿原理解第二章中的习题27．

13．顶角为 2α 的圆锥面上有两个任意的已知点 A 和 B．两点间路程为极小值的曲线称为短程线。试用变分法求其短程线的方程。

（答：$\frac{1}{r}=C_1\cos(\varphi\sin\alpha)+C_2\sin(\varphi\sin\alpha)$，式中 C_1 与 C_2 为积分常数，由曲线上的 A、B 两点的具体位置确定。）

14. 试用变分法证明圆柱面上两点之间的短程线是螺旋线。



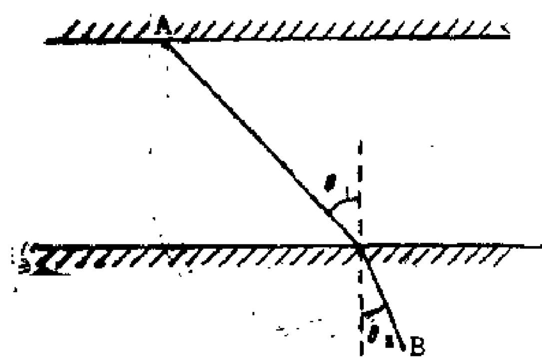
题13图

15. 某人划船之速度为v_1，步行速度为v_2，试证要以最短之时间由A点到达B点，则其划船之登岸点之角度θ_1和θ_2之关系为

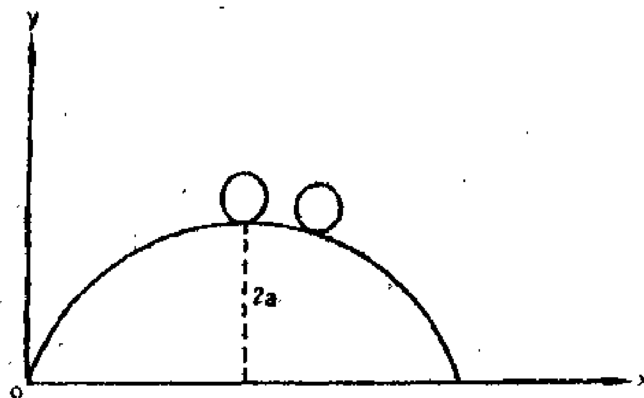
$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}=\frac{v_1}{v_2}$$

16. 一小丘其截面积有一形状如图示之摆线：$x=a(\theta+\sin\theta)$，$y=a(1-\cos\theta)$，一半径为b之实心球体，从小丘的顶点由静止开始将球微微移动，因而其向下滚动而无滑动。求当其到达底端时其中心之速度。

（答：$\sqrt{10g(2a-b)/7}$）



题15图



题16图

第五章　正则变换与哈密顿-雅可俾方程

在第三章里，我们已经建立起哈密顿正则方程，并对一些简单的问题采用直接求解的方法。然而往往在一些复杂的问题中，求解时遇到很大的困难。因此，力学自导出哈密顿正则方程以后，核心的问题就变为去寻找研究哈密顿正则方程的积分问题。本章着重介绍求解哈密顿正则方程积分的基本方法。

§5—1　泊松括号和泊松定理

大家知道，如果我们能够求得哈密顿正则方程

$$\begin{cases} \dot{p}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i} \\ \dot{q}_i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i} \end{cases} \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{5.1}$$

的 $2n$ 个独立积分的话，那么我们就可以通过它们求得哈密顿正则方程（5.1）式的解

$$\begin{cases} p_i = p_i(t, \alpha_i, \beta_i) \\ q_i = q_i(t, \alpha_i, \beta_i) \end{cases} \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{5.2}$$

式中 α_i，β_i 为由初始条件确定的积分常数。泊松定理就是提供我们在知道两个积分时去寻找确定第三个积分的可能。甚至在某一些特殊的情况下，用此定理能得出全部彼此独立的积分，从而，确定了整个质点组的运动。

一、泊松括号的定义与性质

1．泊松括号的定义

设 φ 与 ψ 是正则变量 q_i，p_i 和时间 t 的函数，亦即

$$\begin{cases} \varphi = \varphi(q_i, p_i, t) \\ \psi = \psi(q_i, p_i, t) \end{cases}$$

由这两个函数所组成的下列形式的表示式

$$[\varphi, \psi] = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_i} \frac{\partial \psi}{\partial p_i} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_i} \frac{\partial \psi}{\partial q_i} \right) \tag{5.3}$$

称为**泊松括号**。显然，由此泊松括号我们可以把哈密顿正则方程（5.1）表示得更为对称与完美的形式。因为，作为正则变量 q_i，p_i 是 $2n$ 个彼此独立的变量，所以

$$[p_i, H] = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial p_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial p_i}{\partial p_j} \cdot \frac{\partial H}{\partial q_j} \right)$$

$$=-\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

$$[q_i, H]=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial q_i}{\partial q_j}\cdot\frac{\partial H}{\partial p_j}-\frac{\partial q_i}{\partial p_j}\cdot\frac{\partial H}{\partial q_j}\right)$$

$$=\frac{\partial H}{\partial p_i}$$

因此，哈密顿正则方程（5.1）式可表示为

$$\begin{cases}\dot{p}_i=[p_i,H]\\ \dot{q}_i=[q_i,H]\end{cases}\qquad (i=1,2,\cdots,n) \tag{5.4}$$

2．泊松括号的基本性质

1° 交换φ与ψ，则泊松括号变号．亦即

$$[\varphi,\psi]=-[\psi,\varphi]$$

$$[\varphi,-\psi]=-[\varphi,\psi] \tag{5.5}$$

证：由定义得

$$[\varphi,\psi]=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_i}\,\frac{\partial\psi}{\partial p_i}-\frac{\partial\varphi}{\partial p_i}\,\frac{\partial\psi}{\partial q_i}\right)$$

$$=-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\psi}{\partial q_i}\,\frac{\partial\varphi}{\partial p_i}-\frac{\partial\psi}{\partial p_i}\,\frac{\partial\varphi}{\partial q_i}\right)$$

$$=-[\psi,\varphi]$$

故　　$[\varphi,\psi]=-[\psi,\varphi]$　得证。

至于　$$[\varphi,-\psi]=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial q_i}\cdot\left(-\frac{\partial\psi}{\partial p_i}\right)-\frac{\partial\varphi}{\partial p_i}\cdot\left(-\frac{\partial\psi}{\partial q_i}\right)\right]$$

$$=-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_i}\,\frac{\partial\psi}{\partial p_i}-\frac{\partial\varphi}{\partial p_i}\,\frac{\partial\psi}{\partial q_i}\right)$$

$$=-[\varphi,\psi]$$

故　　$[\varphi,-\psi]=-[\varphi,\psi]$　得证。

2° 如果C为常数，那么

$$[\varphi,C]=0 \tag{5.6}$$

证：由定义

$$[\varphi,C]=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial C}{\partial p_i}-\frac{\partial\varphi}{\partial p_i}\cdot\frac{\partial C}{\partial q_i}\right)$$

因为C为常数，所以上述式子变为

$$[\varphi, C]=0$$

得证。

3° 求 $[\varphi,\psi]$ 对 t 的偏微商，便得

$$\frac{\partial[\varphi,\psi]}{\partial t}=\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t},\ \psi\right]+\left[\varphi,\ \frac{\partial\psi}{\partial t}\right] \tag{5.7}$$

证：$\frac{\partial}{\partial t}[\varphi,\ \psi]=\frac{\partial}{\partial t}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_i}\frac{\partial\psi}{\partial p_i}-\frac{\partial\varphi}{\partial p_i}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial q_i}\right)\right]$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial p_i}-\frac{\partial\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)}{\partial p_i}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial q_i}\right]+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)}{\partial p_i}-\frac{\partial\varphi}{\partial p_i}\cdot\frac{\partial\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)}{\partial q_i}\right]$$

$$=\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t},\ \psi\right]+\left[\varphi,\ \frac{\partial\psi}{\partial t}\right]$$

故 $\frac{\partial[\varphi,\psi]}{\partial t}=\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t},\ \psi\right]+\left[\varphi,\ \frac{\partial\psi}{\partial t}\right]$ 得证。

4° 泊松恒等式：若 f，φ，ψ 都是正则变量 q_i，p_i 和时间 t 的函数，那么，由这些函数所组成的泊松括号之间具有下列关系式：

$$[f,(\varphi,\psi)]+[\varphi,(\psi,f)]+[\psi,(f,\varphi)]\equiv 0 \tag{5.8}$$

称（5.8）式为泊松恒等式。

证：若直接展开这一恒等式中双重的泊松括号，就可以证明这一恒等式。然而，这一计算很繁，为了缩短计算起见，分析一下（5.8）式，每一项必定只包括函数 f，φ，ψ 中的一个二阶微商，因此如果我们证明等式（5.8）左端不包含一个二阶微商，那么这就表明左端等于零，因而恒等式得到证明。因为等式（5.8）的左端对于函数 f，φ，ψ 是对称的，所以证明可以只对一个函数进行。为此，取可以包含函数 f 二阶微商的两项之和，亦即

$$[\varphi,(\psi,f)]+[\psi,(f,\varphi)]=[\varphi,(\psi,f)]-[\psi,(\varphi,f)]$$

计算这一等式的右端就不难见到右端不包含 f 的二阶微商，因为

$$[\varphi,(\psi,f)]-[\psi,(\varphi,f)]=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial q_i}\frac{\partial(\psi,f)}{\partial p_i}-\frac{\partial\varphi}{\partial p_i}\frac{\partial(\psi,f)}{\partial q_i}\right]-$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial\psi}{\partial q_i}\frac{\partial(\varphi,f)}{\partial p_i}-\frac{\partial\psi}{\partial p_i}\frac{\partial(\varphi,f)}{\partial q_i}\right]$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial q_i}\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial p_i},f\right)+\left(\psi,\frac{\partial f}{\partial p_i}\right)\right]-\frac{\partial\varphi}{\partial p_i}\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial q_i},f\right)+\left(\psi,\frac{\partial f}{\partial q_i}\right)\right]\right\}-$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{\partial\psi}{\partial q_i}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p_i},f\right)+\left(\varphi,\frac{\partial f}{\partial p_i}\right)\right]-\frac{\partial\psi}{\partial p_i}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_i},f\right)+\left(\varphi,\frac{\partial f}{\partial q_i}\right)\right]\right\}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial q_i}\left[\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial p_i\partial q_j}\cdot\frac{\partial f}{\partial p_j}-\frac{\partial^2\psi}{\partial p_i\partial p_j}\cdot\frac{\partial f}{\partial q_j}\right)+\right.\right.$$

$$\left.+\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial\psi}{\partial q_j}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial p_i\partial p_j}-\frac{\partial\psi}{\partial p_j}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial p_i\partial q_j}\right)\right]-$$

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial p_i}\left[\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial q_i\partial q_j}\frac{\partial f}{\partial p_j}-\frac{\partial^2\psi}{\partial q_i\partial p_j}\frac{\partial f}{\partial q_j}\right)+\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial\psi}{\partial q_j}\frac{\partial^2 f}{\partial q_i\partial p_j}-\frac{\partial\psi}{\partial p_j}\frac{\partial^2 f}{\partial q_i\partial q_j}\right)\right]\right\}-$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{\partial\psi}{\partial q_i}\left[\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial p_i\partial q_j}\cdot\frac{\partial f}{\partial p_j}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial p_i\partial p_j}\cdot\frac{\partial f}{\partial q_j}\right)+\right.\right.$$

$$\left.+\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_j}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial p_i\partial p_j}-\frac{\partial\varphi}{\partial p_j}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial p_i\partial q_j}\right)\right]-$$

$$-\frac{\partial\psi}{\partial p_i}\left[\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial q_i\partial q_j}\cdot\frac{\partial f}{\partial p_j}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial q_i\partial p_j}\cdot\frac{\partial f}{\partial q_j}\right)+\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_j}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial q_i\partial p_j}-\frac{\partial\varphi}{\partial p_j}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial q_i\partial q_j}\right)\right]\right\}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left\{\left[\frac{\partial\varphi}{\partial q_i}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial p_i\partial q_j}\frac{\partial f}{\partial p_j}-\frac{\partial^2\psi}{\partial p_i\partial p_j}\frac{\partial f}{\partial q_j}\right)-\right.\right.$$

$$\left.-\frac{\partial\varphi}{\partial p_i}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial q_i\partial q_j}\frac{\partial f}{\partial p_j}-\frac{\partial^2\psi}{\partial q_i\partial p_j}\frac{\partial f}{\partial q_j}\right)\right]-$$

$$-\left[\frac{\partial\psi}{\partial q_i}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial p_i\partial q_j}\frac{\partial f}{\partial p_j}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial p_i\partial p_j}\frac{\partial f}{\partial q_j}\right)-\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\partial\psi}{\partial p_i}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial q_i\partial q_j}\frac{\partial f}{\partial p_j}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial q_i\partial p_j}\frac{\partial f}{\partial q_j}\right)\right]\right\}$$

上式确实不出现 f 的二阶微商项，故恒等式（5.8）得证。

5° $[q_i, p_j]=\delta_{ij}=\begin{cases}1 & 当 i=j 时\\ 0 & 当 i\neq j 时\end{cases}$ （5.9）

证：由于正则变量 q_i，p_i 是 $2n$ 个彼此独立的变量，所以由泊松括号的定义得

$$[q_i,p_j]=\sum_{l=1}^{n}\left(\frac{\partial q_i}{\partial q_l}\frac{\partial p_j}{\partial p_l}-\frac{\partial q_i}{\partial p_l}\frac{\partial p_j}{\partial q_l}\right)$$

$$=\delta_{ij}$$

$$=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

故得证。

二、泊松定理

在证明泊松定理之前，我们先寻求函数 $f(q_i,p_i,t)$ 为使 $f(q_i,p_i,t)=C$ 是哈密顿正则方程

$$\begin{cases}\dot{p}_i=-\dfrac{\partial H}{\partial q_i}\\ \dot{q}_i=\dfrac{\partial H}{\partial p_i}\end{cases}\qquad (i=1,2,\cdots,n)\tag{5.10}$$

的积分所应满足的条件。

设 $f(q_1,q_2,\cdots,q_n;\ p_1,p_2,\cdots,p_n;\ t)=C$ 是哈密顿正则方程（5.10）的积分，那么

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\dot{q}_i+\frac{\partial f}{\partial p_i}\dot{p}_i\right)\equiv 0$$

把（5.10）式中的 $\dot{q}_i$，$\dot{p}_i$ 的值代入上述恒等式便得到

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial H}{\partial p_i}-\frac{\partial f}{\partial p_i}\cdot\frac{\partial H}{\partial q_i}\right)\equiv 0$$

由泊松括号的定义，上述式子又可改写为

$$\frac{\partial f}{\partial t}+[f,H]\equiv 0\tag{5.11}$$

因此，要使 $f(q_i,p_i,t)=C$ 为哈密顿正则方程（5.10）的积分时，函数 $f(q_i,p_i,t)$ 必须满足条件（5.11）式。即（5.11）式是函数 $f(q_i,p_i,t)=C$ 为哈密顿正则方程（5.10）的积分的必要条件。当然，我们也容易证明（5.11）式也是函数 $f(q_i,p_i,t)=C$ 为哈密顿正则方程（5.10）的积分的充分条件。

泊松定理：如果函数 $\varphi(q_i,p_i,t)=a$ 与 $\psi(q_i,p_i,t)=b$ 是哈密顿正则方程（5.10）的第一积分时，那么，函数 $[\varphi,\psi]=C$ 也是哈密顿正则方程的积分。

证：由于 $\varphi(q_i,p_i,t)=a$ 与 $\psi(q_i,p_i,t)=b$ 为哈密顿正则方程（5.10）的两个第一

积分，故利用条件（5.11）式则有

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}+[\varphi, H]\equiv 0 \quad 与 \quad \frac{\partial \psi}{\partial t}+[\psi, H]\equiv 0$$

或
$$[H, \varphi]=-[\varphi, H]=\frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad 与 \quad [\psi, H]=-\frac{\partial \psi}{\partial t} \tag{5.12}$$

现以函数H、φ，ψ组成泊松恒等式得

$$[H,(\varphi, \psi)]+[\varphi,(\psi, H)]+[\psi,(H, \varphi)]\equiv 0 \tag{5.13}$$

把（5.12）式代入（5.13）式即得

$$[H,(\varphi, \psi)]+\left[\varphi,-\frac{\partial \psi}{\partial t}\right]+\left[\psi, \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right]=0$$

或者
$$-[(\varphi, \psi), H]-\left[\varphi, \frac{\partial \psi}{\partial t}\right]-\left[\frac{\partial \varphi}{\partial t}, \psi\right]\equiv 0$$

亦即
$$[(\varphi, \psi), H]+\left[\varphi, \frac{\partial \psi}{\partial t}\right]+\left[\frac{\partial \varphi}{\partial t}, \psi\right]\equiv 0 \tag{5.14}$$

因为
$$\left[\frac{\partial \varphi}{\partial t}, \psi\right]+\left[\varphi, \frac{\partial \psi}{\partial t}\right]=\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial t}$$

所以（5.14）式又可表示为

$$\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial t}+[(\varphi, \psi), H]\equiv 0 \tag{5.15}$$

由条件（5.11）式得知，恒等式（5.15）表明：$[\varphi, \psi]=C$是哈密顿正则方程（5.10）的积分，故泊松定理得证。

综上所述，似乎可以利用泊松定理来求得哈密顿正则方程所有的$2n$个积分．可是，遗憾的是这并不永远是成功的，因为实际上往往得出的并不是彼此独立的积分，而是积分的线性组合，或者是已知的两个积分的泊松括号恒等于零．因此．欲求得哈密顿正则方程的解，只好另想他法．如下一节我们即将介绍的正则变换和哈密顿-雅可俾方程方法．

例1．试求由质点组的角动量$\mathbf{G}$的笛卡尔分量G_x，G_y所组成的泊松括号．

解：由质点组角动量的定义得

$$G_x=\sum_{k=1}^{N} m_k(y_k\dot{z}_k-z_k\dot{y}_k)=\sum_{k=1}^{N}(y_k p_{kz}-z_k p_{ky})$$

$$G_y=\sum_{k=1}^{N} m_k(z_k\dot{x}_k-x_k\dot{z}_k)=\sum_{k=1}^{N}(z_k p_{kx}-x_k p_{kz})$$

$$G_z=\sum_{k=1}^{N} m_k(x_k\dot{y}_k-y_k\dot{x}_k)=\sum_{k=1}^{N}(x_k p_{ky}-y_k p_{kx})$$

式中G_x，G_y，G_z是角动量$\mathbf{G}$在三个坐标轴x、y，z上的分量，而p_{kx}，p_{ky}、p_{kz}则是动量$\mathbf{p}_k$的三个分量．

由泊松括号的定义得

$$[G_x,G_y]=\sum_{k=1}^{N}\left[\left(\frac{\partial G_x}{\partial x_k}\frac{\partial G_y}{\partial p_{kx}}-\frac{\partial G_x}{\partial p_{kx}}\frac{\partial G_y}{\partial x_k}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial G_x}{\partial y_k}\frac{\partial G_y}{\partial p_{ky}}-\frac{\partial G_x}{\partial p_{ky}}\frac{\partial G_y}{\partial y_k}\right)+\left(\frac{\partial G_x}{\partial z_k}\frac{\partial G_y}{\partial p_{kz}}-\frac{\partial G_x}{\partial p_{kz}}\frac{\partial G_y}{\partial z_k}\right)\right]$$

因为x_k，y_k，z_k，p_{kx}，p_{ky}，p_{kz}是彼此独立的正则变量，故上述式子又可改写为

$$[G_x,\ G_y]=\sum_{k=1}^{N}(x_k p_{ky}-y_k p_{kx})=G_z$$

至于 $$[G_x,\ G_x]=\sum_{k=1}^{N}\left[\left(\frac{\partial G_x}{\partial x_k}\frac{\partial G_x}{\partial p_{kx}}-\frac{\partial G_x}{\partial p_{kx}}\frac{\partial G_x}{\partial x_k}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial G_x}{\partial y_k}\frac{\partial G_x}{\partial p_{ky}}-\frac{\partial G_x}{\partial p_{ky}}\frac{\partial G_x}{\partial y_k}\right)+\left(\frac{\partial G_x}{\partial z_k}\frac{\partial G_x}{\partial p_{kz}}-\frac{\partial G_x}{\partial p_{kz}}\frac{\partial G_x}{\partial z_k}\right)\right]$$

$$=0$$

同理 $$[G_y,\ G_y]=0$$

例 **2**．试求由质点组的动量 **p** 和角动量 **G** 的笛卡尔分量 p_x，G_y 所组成的泊松括号。

解：由于 $$G_x=\sum_{k=1}^{N}(y_k p_{kz}-z_k p_{ky})$$

$$G_y=\sum_{k=1}^{N}(z_k p_{kx}-x_k p_{kz})$$

$$G_z=\sum_{k=1}^{N}(x_k p_{ky}-y_k p_{kx})$$

$$p_x=\sum_{k=1}^{N}p_{kx}$$

$$p_y=\sum_{k=1}^{N}p_{ky}$$

$$p_z=\sum_{k=1}^{N}p_{kz}$$

故由泊松括号的定义得

$$[G_y,\ p_x]=\sum_{k=1}^{N}\left[\left(\frac{\partial G_y}{\partial x_k}\frac{\partial p_x}{\partial p_{kx}}-\frac{\partial G_y}{\partial p_{kx}}\frac{\partial p_x}{\partial x_k}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial G_y}{\partial y_k}\frac{\partial p_x}{\partial p_{ky}}-\frac{\partial G_y}{\partial p_{ky}}\frac{\partial p_x}{\partial y_k}\right)+\left(\frac{\partial G_y}{\partial z_k}\frac{\partial p_x}{\partial p_{kz}}-\frac{\partial G_y}{\partial p_{kz}}\frac{\partial p_x}{\partial z_k}\right)\right]$$

因为x_k，y_k，z_k，p_{kx}，p_{ky}，p_{kz}是彼此独立的正则变量，故上述式子又可表示为

$$[G_y, p_x] = -\sum_{k=1}^{N} p_{kz} = -p_z$$

至于 $$[G_z, p_z] = \sum_{k=1}^{N}\left[\left(\frac{\partial G_z}{\partial x_k}\frac{\partial p_z}{\partial p_{kx}} - \frac{\partial G_z}{\partial p_{kx}}\frac{\partial p_z}{\partial x_k}\right) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial G_z}{\partial y_k}\frac{\partial p_z}{\partial p_{ky}} - \frac{\partial G_z}{\partial p_{ky}}\frac{\partial p_z}{\partial y_k}\right) + \left(\frac{\partial G_z}{\partial z_k}\frac{\partial p_z}{\partial p_{kz}} - \frac{\partial G_z}{\partial p_{kz}}\frac{\partial p_z}{\partial z_k}\right)\right] = 0$$

例 3．如果 φ 是坐标和动量的任意标量函数，试证：$[\varphi, G_z] = 0$

证：设 $\mathbf{r}$ 和 $\mathbf{p}$ 是质点的坐标和动量，φ 是以 $\mathbf{r}^2$、$\mathbf{p}^2$ 和 $(\mathbf{r}\cdot\mathbf{p})$ 组合形式出现的 $\mathbf{r}$ 和 $\mathbf{p}$ 的标量函数。故有

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{r}} = \frac{\partial\varphi}{\partial(\mathbf{r}^2)}\cdot 2\mathbf{r} + \frac{\partial\varphi}{\partial(\mathbf{r}\cdot\mathbf{p})}\cdot\mathbf{p}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{p}} = \frac{\partial\varphi}{\partial(\mathbf{p}^2)}\cdot 2\mathbf{p} + \frac{\partial\varphi}{\partial(\mathbf{r}\cdot\mathbf{p})}\cdot\mathbf{r}$$

由于 $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ 和 $\mathbf{p} = p_x\mathbf{i} + p_y\mathbf{j} + p_z\mathbf{k}$

于是

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\varphi}{\partial(\mathbf{r}^2)}\cdot 2x + \frac{\partial\varphi}{\partial(\mathbf{r}\cdot\mathbf{p})}\cdot p_x$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial\varphi}{\partial(\mathbf{r}^2)}\cdot 2y + \frac{\partial\varphi}{\partial(\mathbf{r}\cdot\mathbf{p})}\cdot p_y$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial p_x} = \frac{\partial\varphi}{\partial(\mathbf{p}^2)}\cdot 2p_x + \frac{\partial\varphi}{\partial(\mathbf{r}\cdot\mathbf{p})}\cdot x$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial p_y} = \frac{\partial\varphi}{\partial(\mathbf{p}^2)}\cdot 2p_y + \frac{\partial\varphi}{\partial(\mathbf{r}\cdot\mathbf{p})}\cdot y$$

又 $G_z = xp_y - yp_x$ 故由泊松括号的定义得

$$[\varphi, G_z] = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial G_z}{\partial p_x} - \frac{\partial\varphi}{\partial p_x}\cdot\frac{\partial G_z}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\frac{\partial G_z}{\partial p_y} - \frac{\partial\varphi}{\partial p_y}\cdot\frac{\partial G_z}{\partial y}\right) +$$

$$+ \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\cdot\frac{\partial G_z}{\partial p_z} - \frac{\partial\varphi}{\partial p_z}\cdot\frac{\partial G_z}{\partial z}\right)$$

$$= \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial G_z}{\partial p_x} - \frac{\partial\varphi}{\partial p_x}\cdot\frac{\partial G_z}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\frac{\partial G_z}{\partial p_y} - \frac{\partial\varphi}{\partial p_y}\cdot\frac{\partial G_z}{\partial y}\right)$$

$$= \left[\frac{\partial\varphi}{\partial(\mathbf{r}^2)}\cdot 2x + \frac{\partial\varphi}{\partial(\mathbf{r}\cdot\mathbf{p})}\cdot p_x\right](-y) -$$

$$- \left[\frac{\partial\varphi}{\partial(\mathbf{p}^2)}\cdot 2p_x + \frac{\partial\varphi}{\partial(\mathbf{r}\cdot\mathbf{p})}\cdot x\right](p_y) +$$

$$+ \left[\frac{\partial\varphi}{\partial(\mathbf{r}^2)}\cdot 2y + \frac{\partial\varphi}{\partial(\mathbf{r}\cdot\mathbf{p})}\cdot p_y\right](x) -$$

$$- \left[\frac{\partial\varphi}{\partial(\mathbf{p}^2)}\cdot 2p_y + \frac{\partial\varphi}{\partial(\mathbf{r}\cdot\mathbf{p})}\cdot y\right](-p_x)$$

$$= -\frac{\partial\varphi}{\partial(\mathbf{r}^2)}\cdot 2xy - \frac{\partial\varphi}{\partial(\mathbf{r}\cdot\mathbf{p})}\, yp_x - \frac{\partial\varphi}{\partial(\mathbf{p}^2)}\cdot 2p_xp_y -$$

$$- \frac{\partial\varphi}{\partial(\mathbf{r}\cdot\mathbf{p})}\, xp_y + \frac{\partial\varphi}{\partial(\mathbf{r}^2)}\cdot 2xy + \frac{\partial\varphi}{\partial(\mathbf{r}\cdot\mathbf{p})}\, xp_y +$$

$$+\frac{\partial\varphi}{\partial(\mathbf{p}^2)}2p_xp_y+\frac{\partial\varphi}{\partial(\mathbf{r}\cdot\mathbf{p})}yp_x$$

$$=0$$

故得证。

例**4**．一组质点只在内力作用下运动，如y、z方向的两个分角动量为常量，则x方向的分角动量也必定是一个常量，试用泊松定理加以证明。

证：由质点组角动量的定义得：

$$G_x=\sum_{k=1}^{N}(y_kp_{kz}-z_kp_{ky})$$

$$G_y=\sum_{k=1}^{N}(z_kp_{kx}-x_kp_{kz})$$

$$G_z=\sum_{k=1}^{N}(x_kp_{ky}-y_kp_{kx})$$

式中G_x，G_y，G_z是角动量$\mathbf{G}$在三个坐标轴x，y，z上的分量，而p_{kx}，p_{ky}，p_{kz}则是动量$\mathbf{p}_k$的三个分量。

由泊松括号的定义得

$$[G_y,G_z]=\sum_{k=1}^{N}\left[\left(\frac{\partial G_y}{\partial x_k}\frac{\partial G_z}{\partial p_{kx}}-\frac{\partial G_y}{\partial p_{kx}}\frac{\partial G_z}{\partial x_k}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial G_y}{\partial y_k}\frac{\partial G_z}{\partial p_{ky}}-\frac{\partial G_y}{\partial p_{ky}}\frac{\partial G_z}{\partial y_k}\right)+\left(\frac{\partial G_y}{\partial z_k}\frac{\partial G_z}{\partial p_{kz}}-\frac{\partial G_y}{\partial p_{kz}}\frac{\partial G_z}{\partial z_k}\right)\right]$$

因为x_k，y_k，z_k，p_{kx}，p_{ky}，p_{kz}是彼此独立的正则变量，故上述式子又可改写为

$$[G_y,G_z]=\sum_{k=1}^{N}(y_kp_{kz}-z_kp_{ky})=G_x \qquad (1)$$

由题给条件得知

$$G_y=C_1,\quad G_z=C_2$$

故根据泊松定理应有

$$[G_y,G_z]=C_3=\text{常数} \qquad (2)$$

把（1）式代入（2）式便得

$$G_x=C_3=\text{常数}$$

故得证。

§5—2 正则变换

一、循环坐标与循环积分

凡在哈密顿函数H中不显含的广义坐标就称为循环坐标。而对应于循环坐标的广义动量称为循环动量。如H中不显含广义坐标q_j，那么由哈密顿正则方程的第一组方程式

得 $$\dot{p}_i=-\frac{\partial H}{\partial q_i}=0 \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

$$\dot{p}_j=-\frac{\partial H}{\partial q_j}=0$$

或者 $p_j=\alpha_j$（常量）

因而称$p_j=\alpha_j$（常量）为循环积分（也是一种第一积分）。在第三章里的例题6，我们曾经建立起电子在库仑场中运动的哈密顿函数为

$$H=\frac{1}{2m}\left(p_r{}^2+\frac{p_\varphi^2}{r^2}\right)-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qe}{r}$$

显然，H中不显含广义坐标φ，于是φ就称为循环坐标，p_φ就称为循环动量，而$p_\varphi=$ $=mr^2\dot{\varphi}=$常量，称为循环积分。

由此可见，如果我们能够选好所有的广义坐标q_i均为循环坐标的话，亦即哈密顿函数H中只有依赖于广义动量p_i和时间t时，那么由哈密顿正则方程的第一组方程式

得 $$\dot{p}_i=-\frac{\partial H}{\partial q_i}=0 \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

或者 $p_i=\alpha_i$（常量） $(i=1,2,\cdots,n)$

即得n个独立的循环积分。

倘若还假设哈密顿函数H中不显含时间t，亦即$\frac{\partial H}{\partial t}=0$，那么由哈密顿正则方程的第二组方程式得

$$\dot{q}_i=\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\right)_{p_i\to\alpha_i}=\beta_i$$

或者 $q_i=\beta_i t+C_i \qquad (i=1,2,\cdots,n)$

亦即得广义坐标q_i是时间t的线性函数。

最理想的情况，假定在哈密顿函数H中既不显含所有的广义坐标q_i也不显含所有的广义动量p_i，即$H=0$时，那么由哈密顿正则方程得

$$\begin{cases}p_i=\alpha_i\\ q_i=\beta_i\end{cases} \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

亦即立刻可得$2n$个正则方程的积分（即循环积分）。

综上所述，是否能够将变量q_i和p_i这样地变换为新的变量Q_i和P_i，使得用Q_i和P_i表示的运动方程式仍然是正则的，但所有的广义坐标Q_i却已成为循环坐标；或者更

理想的，变换后，新的哈密顿函数 $\bar{H}=0$．如果这种变换存在的话，那么哈密顿正则方程可以很快地、很容易地积分出来．当然，此种变换无疑是存在着，这正是我们下面所要介绍的正则变换．

二、正则变换的定义与目的

如果能找到由正则变量 q_i，p_i 到新的变量 Q_i，P_i 的变换

$$\begin{cases}Q_i=Q_i(q_1,q_2,\cdots,q_n;\ p_1,p_2,\cdots,p_n;\ t)\\ P_i=P_i(q_1,q_2,\cdots,q_n;\ p_1,p_2,\cdots,p_n;\ t)\end{cases}\quad(i=1,2,\cdots,n)\tag{5.16}$$

使得新的哈密顿函数 $\bar{H}(Q_i,P_i,t)$ 和新的这一组变量 Q_i，P_i 仍然满足正则方程

$$\begin{cases}\dot{P}_i=-\dfrac{\partial\bar{H}}{\partial Q_i}\\ \dot{Q}_i=\dfrac{\partial\bar{H}}{\partial P_i}\end{cases}\quad(i=1,2,\cdots,n)\tag{5.17}$$

的话，那么就称（5.16）这种变换为正则变换．

于是，正则变换的目的就在于将由老的正则变量 q_i，p_i 所表示的哈密顿函数 H 中不出现循环坐标（或少出现循环坐标）而导致老的正则方程

$$\begin{cases}\dot{p}_i=-\dfrac{\partial H}{\partial q_i}\\ \dot{q}_i=\dfrac{\partial H}{\partial p_i}\end{cases}\quad(i=1,2,\cdots,n)\tag{5.18}$$

不容易积分变换为新的一组变量 Q_i，P_i（其中 Q_i 都成为循环坐标）所表示的具有最简单形式的哈密顿函数 $\bar{H}$（当然最理想的是 $\bar{H}=0$）所满足的新的正则方程

$$\begin{cases}\dot{P}_i=-\dfrac{\partial\bar{H}}{\partial Q_i}\\ \dot{Q}_i=\dfrac{\partial\bar{H}}{\partial P_i}\end{cases}\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

能很快地、很容易地积分出来．即得

$$\begin{cases}P_i=P_i(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\ \beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n,\ t)\\ Q_i=Q_i(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\ \beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n,\ t)\end{cases}\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

然后，通过反变换便得

$$\begin{cases}q_i=q_i(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\ \beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n,\ t)\\ p_i=p_i(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\ \beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n,\ t)\end{cases}\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

式中 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 为 $2n$ 个积分常数．因此，这就完全确定了质点组的运动了．

三、正则变换的条件

由于哈密顿正则方程（5.18）是直接从哈密顿原理

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L dt = 0$$

或者

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - H \right) dt = 0 \qquad (5.19)$$

推得的，因此满足哈密顿正则方程也意味着满足哈密顿原理。于是，为了在变换（5.16）之后新的变量 Q_i 和 P_i 仍然满足哈密顿正则方程（5.17），其充要条件是使新的变量 Q_i 和 P_i 满足哈密顿原理。亦即

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{i=1}^{n} P_i \dot{Q}_i - \bar{H} \right) dt = 0 \qquad (5.20)$$

为了满足这个条件，其必要与充分的是使（5.19）式和（5.20）式中的被积函数彼此相差一个任意函数 $S^*(q_1, q_2 \cdots, q_n; Q_1, Q_2, \cdots, Q_n; t)$ 的时间微商，亦即使

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - H = \sum_{i=1}^{n} P_i \dot{Q}_i - \bar{H} + \frac{dS^*}{dt} \qquad (5.21)$$

其实，把（5.21）式代入（5.19）式得

$$\begin{aligned}
\delta \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - H \right) &= \delta \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \sum_{i=1}^{n} P_i \dot{Q}_i - \bar{H} + \frac{d}{dt} [S^*(q, Q, t)] \right\} dt \\
&= \delta \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{i=1}^{n} P_i \dot{Q}_i - \bar{H} \right) dt + \delta \int_{t_0}^{t_1} dS^*(q, Q, t) \\
&= \delta \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{i=1}^{n} P_i \dot{Q}_i - \bar{H} \right) dt + \delta \Big[S^*(q, Q, t) \Big]_{t_0}^{t_1} \\
&= 0
\end{aligned} \qquad (5.22)$$

因为函数 $S^*(q, Q, t)$ 在积分的上下限上具有恒定的值，所以 $\delta[S^*(q, Q, t)] = 0$ 于是，（5.22）式便成为

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{i=1}^{n} P_i \dot{Q}_i - \bar{H} \right) dt = 0$$

即得条件（5.20）。若将等式（5.21）乘上dt，并改变各项的次序，便得

$$\sum_{i=1}^{n} p_i dq_i - \sum_{i=1}^{n} P_i dQ_i + (\bar{H} - H) dt = dS^*(q, Q, t) \qquad (5.23)$$

（5.23）式就称为正则变换的条件。

由于 $dS^*(q, Q, t) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial S^*(q, Q, t)}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial S^*(q, Q, t)}{\partial Q_i} dQ_i \right) + \frac{\partial S^*(q, Q, t)}{\partial t} dt$

所以（5.23）式又可表示为

$$\sum_{i=1}^{n} p_i dq_i - \sum_{i=1}^{n} P_i dQ_i + (\bar{H} - H)dt =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial S^*(q,Q,t)}{\partial q_i} dq_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial S^*(q,Q,t)}{\partial Q_i} dQ_i + \frac{\partial S^*(q,Q,t)}{\partial t} dt \tag{5.24}$$

比较等式（5.24）右端和左端中相同微分之前的系数便得

$$\begin{cases} p_i = \dfrac{\partial S^*(q,Q,t)}{\partial q_i} \\ P_i = -\dfrac{\partial S^*(q,Q,t)}{\partial Q_i} \\ \bar{H} = H + \dfrac{\partial S^*(q,Q,t)}{\partial t} \end{cases} \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{5.25}$$

从（5.25）式可以看出，正则变换有赖于任意函数 $S^*(q,Q,t)$ 的选择，此函数称为母函数。于是若设一母函数 $S^*(q,Q,t)$ 时，那么由（5.25）式的第一组方程式，亦即

$$p_i = \frac{\partial S^*(q,Q,t)}{\partial q_i} \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

确定$Q_1,Q_2,\cdots,Q_n$为变量$q_1,q_2,\cdots,q_n$；$p_1,p_2,\cdots p_n$；t 的函数并将这些Q_i的表示式代入（5.25）式的第二组方程式中：

$$P_i = -\frac{\partial S^*(q,Q,t)}{\partial Q_i} \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

由此定出$p_1,p_2,\cdots,p_n$ 为同样一些变量 $q_1,q_2,\cdots,q_n$；$p_1,p_2,\cdots p_n$；t 的函数。

由于母函数规定不同，正则变换还可以有其他别的形式：

（1）若在等式（5.23）中，变换$\sum_{i=1}^{n} P_i dQ_i$项，即

$$\sum_{i=1}^{n} P_i dQ_i = d\left(\sum_{i=1}^{n} P_i Q_i\right) - \sum_{i=1}^{n} Q_i dP_i \tag{5.26}$$

将（5.26）式代入等式（5.23）便得

$$\sum_{i=1}^{n} p_i dq_i + \sum_{i=1}^{n} Q_i dP_i + (\bar{H} - H)dt = d[S^*(q,Q,t) + \sum_{i=1}^{n} P_i Q_i]$$

$$= dS(q,P,t) \tag{5.27}$$

由于$dS(q,P,t) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial S(q,P,t)}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial S(q,P,t)}{\partial P_i} dP_i\right) + \frac{\partial S(q,P,t)}{\partial t} dt$

所以（5.27）式又可表示为

$$\sum_{i=1}^{n} p_i dq_i + \sum_{i=1}^{n} Q_i dP_i + (\bar{H} - H)dt =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial S(q,P,t)}{\partial q_i} dq_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial S(q,P,t)}{\partial P_i} dP_i + \frac{\partial S(q,P,t)}{\partial t} dt \qquad (5.28)$$

比较等式（5.28）右端和左端中相同微分之前的系数便得

$$\begin{cases} p_i = \dfrac{\partial S(q,P,t)}{\partial q_i} \\ Q_i = \dfrac{\partial S(q,P,t)}{\partial P_i} \qquad (i=1,2,\cdots,n) \\ \bar{H} = H + \dfrac{\partial S(q,P,t)}{\partial t} \end{cases} \qquad (5.29)$$

由（5.29）式的第一组方程式，立即

$$p_i = \frac{\partial S(q,P,t)}{\partial q_i} \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

确定出$P_1, P_2, \cdots P_n$为变量$q_1, q_2, \cdots, q_n$；$p_1, p_2, \cdots, p_n$；t 的函数并将这些 P_i 的表示代入（5.29）的第二组方程式中：

$$Q_i = \frac{\partial S(q,P,t)}{\partial P_i} \qquad i=1,2,\cdots,n)$$

由此定出$Q_1, Q_2, \cdots, Q_n$为同一些变量 $q_1, q_2, \cdots, q_n$；$p_1, p_2, \cdots, p_n$；t的函数。

（2）若在等式（5.23）中变换$\sum_{i=1}^{n} p_i dq_i$项，即

$$\sum_{i=1}^{n} p_i dq_i = d\left(\sum_{i=1}^{n} p_i q_i\right) - \sum_{i=1}^{n} q_i dp_i \qquad (5.30)$$

将（5.30）式代入（5.23）式便得

$$-\sum_{i=1}^{n} q_i dp_i - \sum_{i=1}^{n} P_i dQ_i + (\bar{H} - H)dt = d[S^*(q,Q,t) - \sum_{i=1}^{n} p_i q_i]$$

$$= dF^*(p,Q,t) \qquad (5.31)$$

由于 $dF^*(p,Q,t) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F^*(p,Q,t)}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial F^*(p,Q,t)}{\partial Q_i} dQ_i \right) + \frac{\partial F^*(p,Q,t)}{\partial t} dt$

所以（5.31）式又可表示为

$$-\sum_{i=1}^{n} q_i dp_i - \sum_{i=1}^{n} P_i dQ_i + (\bar{H} - H)dt =$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F^*(p,Q,t)}{\partial p_i}dp_i+\sum_{i=0}^{n}\frac{\partial F^*(p,Q,t)}{\partial Q_i}dQ_i+\frac{\partial F^*(p,Q,t)}{\partial t}dt \tag{5.32}$$

比较等式（5.32）右端和左端中相同微分项之前的系数便得

$$\begin{cases} q_i=-\dfrac{\partial F^*(p,Q,t)}{\partial p_i} \\ P_i=-\dfrac{\partial F^*(p,Q,t)}{\partial Q_i} \qquad (i=1,2,\cdots,n) \\ \bar{H}=H+\dfrac{\partial F^*(p,Q,t)}{\partial t} \end{cases} \tag{5.33}$$

由（5.33）式的第一组方程式，亦即

$$q_i=-\frac{\partial F^*(p,Q,t)}{\partial p_i} \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

确定出Q_1，$Q_2,\cdots,Q_n$为变量$q_1,q_2,\cdots,q_n$；$p_1,p_2,\cdots,p_n$；t 的函数，并将这些 Q_i 表示式代入（5.33）式的第二组方程式中：

$$P_i=-\frac{\partial F^*(p,Q,t)}{\partial Q_i} \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

由此定出$P_1,P_2,\cdots,P_n$为同样一些变量$q_1,q_2,\cdots,q_n$；$p_1,p_2,\cdots,p_n$；t的函数。

（3）若在等式（5.23）中，同时变换$\sum_{i=1}^{n}p_idq_i$和$\sum_{i=1}^{n}P_idQ_i$两项，即

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n}p_idq_i=d\left(\sum_{i=1}^{n}p_iq_i\right)-\sum_{i=1}^{n}q_idp_i \\ &\sum_{i=1}^{n}P_idQ_i=d\left(\sum_{i=1}^{n}P_iQ_i\right)-\sum_{i=1}^{n}Q_idP_i \end{aligned} \tag{5.34}$$

把（5.34）式代入（5.23）式便有：

$$\begin{aligned} -\sum_{i=1}^{n}q_idp_i+\sum_{i=1}^{n}Q_idP_i+(\bar{H}-H)dt&=d[S^*(q,Q,t)-\sum_{i=1}^{n}p_iq_i+\sum_{i=1}^{n}P_iQ_i] \\ &=dF(p,P,t) \end{aligned} \tag{5.35}$$

由于$dF(p,P,t)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F(p,P,t)}{\partial p_i}dp_i+\frac{\partial F(p,P,t)}{\partial P_i}dP_i\right)+\frac{\partial F(p,P,t)}{\partial t}dt$

所以（5.35）式又为表示为

$$-\sum_{i=1}^{n}q_idp_i+\sum_{i=1}^{n}Q_idP_i+(\bar{H}-H)dt=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F(p,P,t)}{\partial p_i}dp_i+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F(p,P,t)}{\partial P_i}dP_i+\frac{\partial F(p,P,t)}{\partial t}dt \tag{5.36}$$

比较等式（5.36）右端和左端中相同的微分项之前的系数便得

$$\begin{cases} q_i=-\dfrac{\partial F(p,P,t)}{\partial p_i} \\ Q_i=\dfrac{\partial F(p,P,t)}{\partial P_i} \qquad (i=1,2,\cdots,n) \\ \overline{H}=H+\dfrac{\partial F(p,P,t)}{\partial t} \end{cases} \tag{5.37}$$

由（5.37）式中第一组方程式，亦即

$$q_i=-\frac{\partial F(p,P,t)}{\partial p_i} \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

确定出 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 为变量 $q_1,q_2,\cdots,q_n;\ p_1,p_2,\cdots,p_n;\ t$ 的函数，并将这些 P_i 的表示式代入（5.37）式的第二组方程式中：

$$Q_i=\frac{\partial F(p,P,t)}{\partial P_i} \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

由此定出 $Q_1,Q_2,\cdots,Q_n$ 同样为这些变量 $q_1,q_2,\cdots,q_n;\ p_1,p_2,\cdots,p_n;\ t$ 的函数。

综上所述，由于母函数选择形式的不同，我们就得到上述四种实质上是等效形式的正则变换。因此，母函数的选择便成为正则变换的关键。

例1．试证：

$$\begin{cases} Q=\ln\left(\dfrac{1}{q}\sin p\right) \\ P=q\operatorname{ctg}p \end{cases}$$

为一正则变换。

证：由于 $Q=\ln\left(\dfrac{1}{q}\sin p\right)$ 故有

$$dQ=\frac{q}{\sin p}\left(\frac{\cos p}{q}dp-\frac{\sin p}{q^2}dq\right)$$

$$=\operatorname{ctg}p\,dp-\frac{1}{q}dq \tag{1}$$

且 $\dfrac{1}{q}\sin p=e^Q$

即得

$$\begin{aligned} &\sin p=qe^Q \\ &\cos p=\sqrt{1-(qe^Q)^2} \\ &p=\arcsin(qe^Q) \end{aligned} \tag{2}$$

于是

$$pdq-PdQ=pdq-q\operatorname{ctg}p\left(\operatorname{ctg}p\,dp-\frac{1}{q}dq\right)$$

$$=(p+\operatorname{ctg}p)dq-q\operatorname{ctg}^2p\,dp$$

$$=d[q(p+\operatorname{ctg}p)] \tag{3}$$

由于题给的变换关系式不显含时间 t，效 $\bar{H}=H$，因而正则变换的条件（5.23）式就变为

$$pdq-PdQ=dS^*(q,Q) \qquad (4)$$

比较（3）式与（4）式并注意到（2）式便得

$$dS^*(q,Q)=d\left\{q\left[\arcsin(qe^Q)+\frac{\sqrt{1-(qe^Q)^2}}{qe^Q}\right]\right\}$$

即
$$S^*(q,Q)=q\left[\arcsin(qe^Q)+\frac{\sqrt{1-(qe^Q)^2}}{qe^Q}\right].$$

由此可见，题给的变换为正则变换。

例2 证明变换方程

$$\begin{cases} q=(2Q)^{\frac{1}{2}}K^{-\frac{1}{2}}\cos P \\ p=(2Q)^{\frac{1}{2}}K^{\frac{1}{2}}\sin P \end{cases}$$

代表一正则变换并将正则方程

$$\begin{cases} \dot{p}=-\dfrac{\partial H}{\partial q} \\ \dot{q}=\dfrac{\partial \bar{H}}{\partial P} \end{cases}$$

变为
$$\begin{cases} \dot{P}=-\dfrac{\partial \bar{H}}{\partial Q} \\ \dot{Q}=\dfrac{\partial \bar{H}}{\partial P} \end{cases}$$

式中
$$H=\tfrac{1}{2}(p^2+K^2q^2)$$
$$\bar{H}=KQ$$

证：由于 $q=(2Q)^{\frac{1}{2}}K^{-\frac{1}{2}}\cos P$

故有
$$dq=[\tfrac{1}{2}(2Q)^{-\frac{1}{2}}K^{-\frac{1}{2}}2dQ]\cos P-(2Q)^{\frac{1}{2}}K^{-\frac{1}{2}}\sin PdP$$
$$=(2Q)^{-\frac{1}{2}}K^{-\frac{1}{2}}\cos PdQ-(2Q)^{\frac{1}{2}}K^{-\frac{1}{2}}\sin PdP \qquad (1)$$

且
$$\cos P=(2Q)^{-\frac{1}{2}}K^{\frac{1}{2}}q$$
$$\sin P=\sqrt{1-\cos^2P}=\sqrt{1-(2Q)^{-1}Kq^2} \qquad (2)$$
$$P=\arccos[(2Q)^{-\frac{1}{2}}K^{\frac{1}{2}}q]$$

于是

$$pdq-PdQ=(2Q)^{\frac{1}{2}}K^{\frac{1}{2}}\sin P[(2Q)^{-\frac{1}{2}}K^{-\frac{1}{2}}\cos PdQ-(2Q)^{\frac{1}{2}}K^{-\frac{1}{2}}\sin PdP]-PdQ$$
$$=(\sin P\cos P-P)dQ-2Q\sin^2PdP$$
$$=d[(\sin P\cos P-P)Q]$$

由于题给的变换关系式不显含时间 t，故 $\bar{H}=H$，因而正则变换的条件（5.23）式就变为

$$pdq-PdQ=dS^*(q,Q) \qquad (4)$$

比较（3）式与（4）式并注意到（2）式便得

$$S^*(q,Q)=\{(2Q)^{\frac{1}{2}}K^{\frac{1}{2}}q\sqrt{1-(2Q)^{-1}Kq^2}-\arccos[(2Q)^{-\frac{1}{2}}K^{\frac{1}{2}}q]\}Q$$

由此可见，题给的变换为正则变换。

由于题给

$$H=\frac{1}{2}(p^2+K^2q^2)$$

故老的正则变量q,p所满足的哈密顿正则方程为

$$\begin{cases}\dot{p}=-\dfrac{\partial H}{\partial q}=-K^2q\\[2mm]\dot{q}=\dfrac{\partial H}{\partial p}=p\end{cases}\tag{5}$$

又因为$\overline{H}=H=\frac{1}{2}(p^2+K^2q^2)=\frac{1}{2}(2QK\sin^2P+2QK\cos^2P)=KQ$

所以新的正则变量Q,P所满足的哈密顿正则方程为

$$\begin{cases}\dot{P}=-\dfrac{\partial\overline{H}}{\partial Q}=-K\\[2mm]\dot{Q}=\dfrac{\partial\overline{H}}{\partial P}=0\end{cases}\tag{6}$$

显然，方程（6）比方程（5）容易解。由方程（6）积分一次便得

$$\begin{cases}P=-Kt+\alpha\\Q=\beta\end{cases}\tag{7}$$

将（7）式代入变换方程立即可得

$$q=(2\beta)K^{-\frac{1}{2}}\cos(-Kt+\alpha)=\sqrt{\frac{2\beta}{K}}\cos(Kt-\alpha)$$

式中α,β为积分常数，由初始条件确定。

例 3 用正则变换法求平面谐振子的运动。

解： 若选直角坐标x,y为谐振子的广义坐标；p_x,p_y为它们相应的广义动量；ω_1，ω_2为谐振子沿ox轴及oy轴的振动频率；m为谐振子的质量，那么谐振子的哈密顿函数为

$$H=\frac{1}{2m}(p_x^2+p_y^2)+\frac{1}{2}m(\omega_1x^2+\omega_2y^2)\tag{1}$$

如果选择母函数S^*为

$$S^*(q,Q)=S^*(x,y,Q_1,Q_2)=\frac{1}{2}m(\omega_1x^2\text{ctg}Q_1+\omega_2y^2\text{ctg}Q_2)\tag{2}$$

$$\begin{aligned}&p_x=\frac{\partial S^*}{\partial x}=m\omega_1x\text{ctg}Q_1\quad,\quad p_y=\frac{\partial S^*}{\partial y}=m\omega_2y\text{ctg}Q_2\\&P_1=-\frac{\partial S^*}{\partial Q_1}=\frac{1}{2}m\omega_1x^2\csc^2Q_1\quad,\quad P_2=-\frac{\partial S^*}{\partial Q_2}=\frac{1}{2}m\omega_2y^2\csc^2Q_2\end{aligned}\tag{3}$$

$$\bar{H}=H+\frac{\partial S^*}{\partial t}=H$$

故有

$$\bar{H}=H=\frac{1}{2}m(\omega_1^2x^2\text{ctg}^2Q_1+\omega_2^2y^2\text{ctg}^2Q_2)+\frac{1}{2}m(\omega_1^2x^2+\omega_2^2y^2)=$$

$$=\frac{1}{2}m\omega_1^2x^2(1+\text{ctg}^2Q_1)+\frac{1}{2}m\omega_2^2y^2(1+\text{ctg}^2Q_2)$$

$$=\frac{1}{2}m\omega_1^2x^2\csc^2Q_1+\frac{1}{2}m\omega_2^2y^2\csc^2Q_2$$

$$=\omega_1P_1+\omega_2P_2 \tag{4}$$

而用新变量 Q_1,Q_2，P_1,P_2 表示的谐振子的运动方程根据（5.17）式为

$$\begin{cases}\dot{P}_1=-\dfrac{\partial\bar{H}}{\partial Q_1}=0\\[2ex]\dot{Q}_1=\dfrac{\partial\bar{H}}{\partial P_1}=\omega_1\end{cases}\quad\text{与}\quad\begin{cases}\dot{P}_2=-\dfrac{\partial\bar{H}}{\partial Q_2}=0\\[2ex]\dot{Q}_2=\dfrac{\partial\bar{H}}{\partial P_2}=\omega_2\end{cases} \tag{5}$$

积分（5）式得

$$\begin{cases}P_1=\alpha_1\\ Q_1=\omega_1t+\beta_1\end{cases}\quad\text{与}\quad\begin{cases}P_2=\alpha_2\\ Q_2=\omega_2t+\beta_2\end{cases} \tag{6}$$

式中 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1$及$\beta_2$ 是四个积分常数，由初始条件确定。于是，把（6）式代入（3）式的第二组方程即得谐振子在 xy 平面上的运动规律为

$$\begin{cases}x=\sqrt{\dfrac{2\alpha_1}{m\omega_1}}\sin(\omega_1t+\beta_1)\\[2ex] y=\sqrt{\dfrac{2\alpha_2}{m\omega_2}}\sin(\omega_2t+\beta_2)\end{cases} \tag{7}$$

由此可见，由于我们所选的母函数$S^*(q,Q)$十分适当，使得用新变量所表示的哈密顿函数$\bar{H}$只是变量P_1,P_2的函数，而Q_1,Q_2均成为循环坐标。于是，我们能够直接通过（5）式的积分很快地得到（6）式，进而得到（8）式。这也是我们要进行正则变换的目的所在。

例4 试利用正则变换，由正则方程求竖直上抛的物体的运动规律。已知本问题的母函数$S^*=mg(\frac{1}{6}gQ^3+qQ)$，式中$q$为确定物体位置的广义坐标，$Q$为变换后新的广义坐标，$g$为重力加速度。

解： 设物体的质量为m，那么物体的动能为

$$T=\frac{1}{2}m\dot{q}^2$$

若选物体起始位置为势能的参考点时，那么物体的势能为

$$V=mgq$$

于是、物体的拉格朗日函数为

$$L=T-V=\frac{1}{2}m\dot{q}^2-mgq$$

由广义动量的定义得

$$p=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}=m\dot{q}$$

故有 $\dot{q}=\frac{p}{m}$

因此，由哈密顿函数的定义得

$$H=(p\dot{q}-L)_{\dot{q}\to p}=\frac{p^2}{m}-\frac{1}{2}m\cdot\frac{p^2}{m^2}+mgq=\frac{p^2}{2m}+mgq \qquad (1)$$

把已知的母函数$S^*(q,Q)=mg\left(\frac{1}{6}gQ^3+qQ\right)$代入（5.25）式得

$$\begin{cases} p=\dfrac{\partial S^*}{\partial q}=mgQ \\ \mathrm{P}=-\dfrac{\partial S^*}{\partial Q}=-mg\left(\dfrac{1}{2}gQ^2+q\right) \\ \bar{H}=H+\dfrac{\partial S^*}{\partial t}=H=\dfrac{1}{2m}(mgQ)^2-\dfrac{1}{2}mg^2Q^2-\mathrm{P}=-\mathrm{P} \end{cases} \qquad (2)$$

于是，由（5.17），式得

$$\begin{cases} \dot{\mathrm{P}}=-\dfrac{\partial \bar{H}}{\partial Q}=0 \\ \dot{Q}=\dfrac{\partial \bar{H}}{\partial \mathrm{P}}=-1 \end{cases} \qquad (3)$$

积分（3）式便有

$$\begin{cases} \mathrm{P}=\alpha \\ Q=-t+\beta \end{cases} \qquad (4)$$

式中α，β为积分常数，由初始条件确定。故把（4）式代入（2）式中的第二个方程便得

$$q=-\frac{\alpha}{mg}-\frac{1}{2}g(\beta-t)^2 \qquad (5)$$

（5）式就是竖直上抛物体的动运规律。

§5—3 哈密顿—雅可俾方程

一 一般的哈密顿——雅可俾方程

在上一节里，我们曾经指出过，正则变换的关键是适当选择母函数。现在，如果能选取母函数 $S(q_1,q_2,\cdots,q_n;\ \mathrm{P}_1,\mathrm{P}_2,\mathrm{P}_n;\ t)$ 使得新的哈密顿函数 $\bar{H}(Q_1,Q_2,\cdots,Q_n;\ \mathrm{P}_1,\ \mathrm{P}_2,\cdots,\ \mathrm{P}_n;\ t)\equiv 0$，

那么，由**哈密顿正则方程**（5.17）式得

$$\begin{cases}\dot{P}_i=-\dfrac{\partial H}{\partial Q_i}=0\\[2ex] \dot{Q}_i=\dfrac{\partial H}{\partial P_i}=0\end{cases}\qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

积分上式便有

$$\begin{cases}P_i=\alpha_i\\ Q_i=\beta_i\end{cases}\qquad (i=1,2,\cdots,n)\qquad (5.38)$$

式中 α_i、β_i为$2n$个积分常数。于是，哈密顿正则方程的积分问题就完全解决了。为了达到上述的目的，我们通过变换关系式（5.29）的第三个方程，便能找到母函数 $S(q_1,q_2,\cdots,q_n;\ P_1,P_2,\cdots,P_n;\ t)$所必须满足的方程，即

$$H(q_1,q_2,\cdots q_n;\ p_1,p_2,\cdots p_n;\ t)+\frac{\partial S}{\partial t}=0 \qquad (5.39)$$

由（5.38）式可知，变换后的 $P_i=\alpha_i$=常数，若把它代入母函数 S 中，那么S就变为 $q_1,q_2,\cdots,q_n;\ \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n;\ t$的函数，亦即

$$S=S(q_1,q_2,\cdots,q_n;\ \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n;\ t) \qquad (5.40)$$

又由变换关系式（5.29）的第一个方程得

$$p_i=\frac{\partial S(q,P,t)}{\partial q_i}=\frac{\partial S(q,\alpha,t)}{\partial q_i}\qquad (i=1,2,\cdots,n)\qquad (5.41)$$

于是，把（5.40）式与（5.41）式同时代入（5.39）式便得

$$H\left(q_1,q_2,\cdots,q_n;\ \frac{\partial S}{\partial q_1},\ \frac{\partial S}{\partial q_2},\ \cdots,\ \frac{\partial S}{\partial q_n};\ t\right)+\frac{\partial S}{\partial t}=0 \qquad (5.42)$$

（5.42）方程式是由哈密顿与雅可俾分别用不同的方法导出并给予解释的。因此，（5.42）方程就称为哈密顿—雅可俾方程，或者简称哈—雅方程（即H—J方程）。它是一个含有（$n+1$）个自变量$q_1,q_2,\cdots,q_n;\ t$ 的函数 S 的一阶偏微分方程。由于这个方程中只含S的一阶偏导数，而不含S本身，所以它的通解中的（$n+1$）个积分常数应有一个是相加的。亦即，它的通解将具有下列的形式

$$S=S(q_1,q_2,\cdots,q_n;\ \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n;\ t)+\alpha_{n+1} \qquad (5.43)$$

因此，一旦 H-J 方程的通解 S 求出后，将（5.38）式的 $P_i=\alpha_i$ 和$Q_i=\beta_i(i=1,2,\cdots,n)$以及（5.43）式的 S 值先代入变换关系式（5.29）的第二个方程得

$$\beta_i=\frac{\partial S(q,\alpha,t)}{\partial \alpha_i}\qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

用反演法解出 q_i，而后将 q_i 的值再代入变换关系式(5.29)的第一个方程即（5.41）式

$$p_i=\frac{\partial S(q,\alpha,t)}{\partial q_i}\qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

解得p_i，于是，便得到哈密顿正则方程的积分

$$\begin{cases}p_i=p_i(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n;\ \beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n,t)\\ q_i=q_i(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n;\ \beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n,t)\end{cases}\qquad (i=1,2,\cdots,n)\qquad (5.44)$$

由此可见，H-J的方法是提供一种特殊的正则变换。它把哈密顿正则方程的求解问题归结为如何从 H-J 方程求 S 的问题。

在 H-J 方程中出现的母函数S称为哈密顿主函数。它恰好就是保守组的哈密顿原理中的哈密顿作用量$S=\int_{t_0}^{t_1}Ldt$。下面我们来稍加证明一下：

由于哈密顿作用量S为

$$S=\int_{t_0}^{t_1}Ldt$$

所以

$$\frac{dS}{dt}=L$$

又由勒襄特变换

$$H(q_1,q_2,\cdots,q_n;\ p_1,p_2,\cdots,p_n;\ t)=\sum_{i=1}^{n}p_i\dot{q}_i-L$$

故有
$$\frac{dS}{dt}=\sum_{i=1}^{n}p_i\dot{q}_i-H(q_1,q_2,\cdots,q_n;\ p_1,p_2,\cdots,p_n;\ t) \tag{5.45}$$

另方面，由于哈密顿主函数

$$S=S(q_1,q_2,\cdots,q_n;\ \alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n;\ t)$$

所以
$$\frac{dS}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial S}{\partial q_i}\dot{q}_i+\frac{\partial S}{\partial t}$$

又由变换关系式

$$p_i=\frac{\partial S}{\partial q_i}$$

故有
$$\frac{dS}{dt}=\sum_{i=1}^{n}p_i\dot{q}_i+\frac{\partial S}{\partial t} \tag{5.46}$$

倘若哈密顿作用量就是哈密顿主函数，那么方程（5.45）式应等于方程（5.46），亦即

$$H(q_1,q_2,\cdots,q_n;\ p_1,p_2,\cdots,p_n;\ t)+\frac{\partial S}{\partial t}=0$$

或者
$$H\left(q_1,q_2,\cdots,q_n;\frac{\partial S}{\partial q_1},\ \frac{\partial S}{\partial q_2},\ \cdots,\ \frac{\partial S}{\partial q_n},\ t\right)+\frac{\partial S}{\partial t}=0$$

此方程就是 H-J 方程。由此可见，H-J 方程中的主函数S就是哈密顿原理中的哈密顿作用量S。

二　哈密顿函数H中不显含时间t时的哈密顿—雅可俾方程

由于$H=H(q_1,q_2,\cdots,q_n;\ p_1,p_2,p_n)$

故哈密顿—雅可俾方程为

$$H\left(q_1,q_2,\cdots,q_n;\ \frac{\partial S}{\partial q_1},\ \frac{\partial S}{\partial q_2},\ \cdots,\ \frac{\partial S}{\partial q_n}\right)+\frac{\partial S}{\partial t}=0 \tag{5.47}$$

在§3—2，我们曾经研究过当H不显含时间t得到了哈密顿正则方程的能量积分，即

$$H(q_1,q_2,\cdots,q_n;\ p_1,p_2,\cdots,p_n)=h\text{（常量）} \tag{5.48}$$

将（5.48）式代入（5.47）代入式得

$$\frac{\partial S}{\partial t}=-h \tag{5.49}$$

积分上式得

$$S=-ht+W(q_1,q_2,\cdots,q_n) \tag{5.50}$$

式中函数$W(q_1,q_2,\cdots,q_n)$称为特性函数。此函数恰好是最小作用量原理中的拉格朗日作用量，即

$$W=\int_{t_0}^{t_f}2Tdt$$

将（5.50）式两端对q_i求导得

$$\frac{\partial S}{\partial q_i}=\frac{\partial W}{\partial q_i} \tag{5.51}$$

把（5.49）式与（5.51）式同时代入（5.47）式得

$$H\left(q_1,q_2,\cdots,q_n;\ \frac{\partial W}{\partial q_1},\ \frac{\partial W}{\partial q_2}\cdots,\ \frac{\partial W}{\partial q_n}\right)=h \tag{5.52}$$

此式就称为哈密顿函数H中不显含时间t的哈密顿—雅可俾方程。与一般的哈密顿—雅可俾方程相仿，方程（5.52）是一个含有n个自变量$q_1,q_2,\cdots,q_n$的函数W的一阶偏微分方程。由于方程中只含W的一阶偏导数，而不含W本身，所以它的通解中除了n个积分常数外，还有一个可加常数。又由于h是一个积分常数，所以它应包含在n个积分常数中。于是，方程（5.52）的通解将为

$$W=W(q_1,q_2,\cdots,q_n;\ \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1},h)+\alpha_{n+1} \tag{5.53}$$

把（5.50）式与（5.53）式式同时代入变换关系式（5.29）的第一个与第二个方程得

$$\begin{aligned}p_i&=\frac{\partial S}{\partial q_i}\\&=\frac{\partial}{\partial q_i}[W(q_1,q_2,\cdots,q_n;\ \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1},h)+\alpha_{n+1}-ht]\\&=\frac{\partial W}{\partial q_i}\qquad(i=1,2,\cdots,n)\end{aligned}$$

$$\beta_i=\frac{\partial S}{\partial \alpha_i}=\frac{\partial W}{\partial \alpha_i}\qquad(i=1,2\cdots,n-1)$$

$$\beta_n=\frac{\partial S}{\partial\alpha_n}=\frac{\partial S}{\partial h}=\frac{\partial W}{\partial h}-t=-t_0$$

亦即

$$\begin{cases} p_i=\dfrac{\partial W}{\partial q_i} & (i=1,2,\cdots,n) \\ \beta_i=\dfrac{\partial W}{\partial\alpha_i} & (i=1,2,\cdots,n-1) \\ t-t_0=\dfrac{\partial W}{\partial h} \end{cases} \tag{5.54}$$

式中 t_0 为任意积分常数，表示运动开始的时间。方程（5.54）的第一组积分称为中间积分，它是用来决定动量 p_i 的；第二组（$n-1$）个积分称为几何积分，它们并不包含时间，而在多维空间中决定一条曲线，这曲线是代表质点组的质点在多维空间中的轨道；最后一个包含时间的积分称为运动积分，它给出了质点组的质点在多维空间中沿着轨道运动的规律。由此可见，哈密顿正则方程的优越性在于利用哈密顿一雅可俾方程后所得到的结果十分普遍，可以同时得出动量、运动轨道以及运动规律。这是拉格朗日方程所不能比拟的。同时我们还应该指出，哈密顿一雅可俾方程不仅对力学本身的发展起了很大的作用，而且在发展天体力学的摄动理论以及在近代原子物理的发展过程中都曾经起过重要的作用。因此，它在理论物理中，占了很重要的地位。

由于大量遇到的实际问题中，均为稳定保守组的情况，因此，我们有必要进一步来研究稳定保守组的哈密顿一雅可俾方程。十分显然，对于稳定保守组而言，哈密顿函数 $H=E$（总能量）。于是，我们只要把上述各式中的 h 用 E 代替，就能得到稳定保守组的哈密顿一雅可俾方程的全部结论。

三 分离变量法

在大量遇到的实际问题中，稳定保守组的哈密顿一雅可俾方程均可用分离变量的方法来求解。下面我们举几个实际典型的例子来加以说明。

例1. 试应用哈密顿一雅可俾方程解质点在球坐标（r,θ,φ）中受转力作用而运动的问题。

解：若设质点的质量为 m，力心的质量为 M，那么质点在如图5.1所示的球坐标中的动能表达式为

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta) \tag{1}$$

广义动量为

$$p_r=m\dot{r}$$

$$p_\theta=mr^2\dot{\theta}$$

$$p_\varphi=mr^2\sin^2\theta\dot{\varphi}$$

由此可得

$$\dot{r}=\frac{p_r}{m}$$

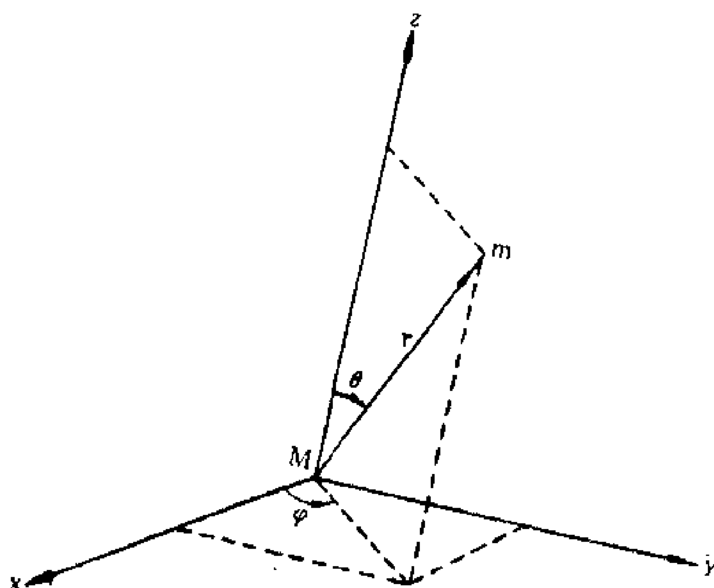


图5.1

$$\dot{\theta}=\frac{p_\theta}{mr^2}$$

$$\dot{\varphi}=\frac{p_\varphi}{mr^2\sin^2\theta}$$

于是，动能的表达式（1）又可表示为

$$T=\frac{1}{2m}\left(p_r^2+\frac{p_\theta^2}{r^2}+\frac{p_\varphi^2}{r^2\sin^2\theta}\right) \tag{2}$$

质点的引力势能为

$$V=-\frac{GmM}{r} \tag{3}$$

因而，质点的哈密顿函数为

$$H=\left(\sum_{i=1}^{3}p_i\dot{q}_i-L\right)_{\dot{q}_i\to p_i}$$

$$=\frac{p_r^2}{m}+\frac{p_\theta^2}{mr^2}+\frac{p_\varphi^2}{mr^2\sin^2\theta}-\left[\frac{1}{2m}\left(p_r^2+\frac{p_\theta^2}{r^2}+\frac{p_\varphi^2}{r^2\sin^2\theta}\right)+\frac{GmM}{r}\right]$$

$$=\frac{1}{2m}\left(p_r^2+\frac{p_\theta^2}{r^2}+\frac{p_\varphi^2}{r^2\sin^2\theta}\right)-\frac{GmM}{r} \tag{4}$$

由于质点在辏力场中的运动是属于稳定保守组的情况，所以

$$p_r=\frac{\partial W}{\partial r}$$

$$p_\theta=\frac{\partial W}{\partial \theta}$$

$$p_\varphi=\frac{\partial W}{\partial \varphi}$$

于是，质点运动的哈密顿—雅可俾方程为

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \theta}\right)^2+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^2\right]-\frac{GmM}{r}=E \qquad (5)$$

（5）式是一个一阶二次的偏微分方程，可以用分离变量法解之。为此，令

$$W(r,\theta,\varphi)=W_r(r)+W_\theta(\theta)+W_\varphi(\varphi) \qquad (6)$$

把（6）式代入（5）式得

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{dW_r}{dr}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{dW_\theta}{d\theta}\right)^2+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left(\frac{dW_\varphi}{d\varphi}\right)^2\right]-\frac{GmM}{r}=E \qquad (7)$$

分离变量，（7）式又可表示为

$$\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left(\frac{dW_\varphi}{d\varphi}\right)^2=2mE+\frac{2Gm^2M}{r}-\frac{1}{r^2}\left(\frac{dW_\theta}{d\theta}\right)^2-\left(\frac{dW_r}{dr}\right)^2$$

即

$$\left(\frac{dW_\varphi}{d\varphi}\right)^2=2mEr^2\sin^2\theta+2Gm^2Mr\sin^2\theta-\sin^2\theta\left(\frac{dW_\theta}{d\theta}\right)^2-r^2\sin^2\theta\left(\frac{dW_r}{dr}\right)^2 \qquad (8)$$

因为方程（8）式左端是φ的函数，而右端则为r，θ的函数，所以方程（8）式要成立就必须方程两端同时为常数（不仿设此常数为α_1^2）。故有

$$\left(\frac{dW_\varphi}{d\varphi}\right)^2=\alpha_1^2$$

$$-\sin^2\theta\left(\frac{dW_\theta}{d\theta}\right)^2-r^2\sin^2\theta\left(\frac{dW_r}{dr}\right)^2+2Gm^2Mr\sin^2\theta+2mEr^2\sin^2\theta=\alpha_1^2$$

再一次分离变量，则上述方程组又变为

$$\left(\frac{dW_\varphi}{d\varphi}\right)^2=\alpha_1^2$$

$$\left(\frac{dW_\theta}{d\theta}\right)^2+\frac{\alpha_1^2}{\sin^2\theta}=-r^2\left(\frac{dW_r}{dr}\right)^2+2Gm^2Mr+2mEr^2$$

由于上述方程组的第二个方程的左端是θ的函数，而右端是r的函数，所以上述方程组的第二个方程的两端必须同时等于常数（不仿设为α_2^2）。于是，又有

$$\begin{cases}\left(\dfrac{dW_\varphi}{d\varphi}\right)^2=\alpha_1^2\\ \left(\dfrac{dW_\theta}{d\theta}\right)^2+\dfrac{\alpha_1^2}{\sin^2\theta}=\alpha_2^2\\ -r^2\left(\dfrac{dW_r}{dr}\right)^2+2Gm^2Mr+2mEr^2=\alpha_2^2\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}\left(\dfrac{dW_\varphi}{d\varphi}\right)^2=\alpha_1^2\\ \left(\dfrac{dW_\theta}{d\theta}\right)^2=\alpha_2^2-\dfrac{\alpha_1^2}{\sin^2\theta}\\ \left(\dfrac{dW_r}{dr}\right)^2=2mE+\dfrac{2Gm^2M}{r}-\dfrac{\alpha_2^2}{r^2}\end{cases}$$

或者

$$\begin{cases} \dfrac{dW_\varphi}{d\varphi}=\alpha_1 \\ \dfrac{dW_\theta}{d\theta}=\sqrt{\alpha_2^2-\dfrac{\alpha_1^2}{\sin^2\theta}} \\ \dfrac{dW_r}{dr}=\sqrt{2mE+\dfrac{2Gm^2M}{r}-\dfrac{\alpha_2^2}{r^2}} \end{cases} \quad (9)$$

将（9）式积分得

$$\begin{cases} W_\varphi=\alpha_1\varphi \\ W_\theta=\int\sqrt{\alpha_2^2-\dfrac{\alpha_1^2}{\sin^2\theta}}\,d\theta \\ W_r=\int\sqrt{2mE+\dfrac{2Gm^2M}{r}-\dfrac{\alpha_2^2}{r^2}}\,dr \end{cases} \quad (10)$$

因而哈密顿—雅可俾方程（5）的解为

$$W(r,\ \theta,\ \varphi)=W_r+W_\theta+W_\varphi$$
$$=\int\sqrt{2mE+\frac{2Gm^2M}{r}-\frac{\alpha_2^2}{r^2}}\,dr+\int\sqrt{\alpha_2^2-\frac{\alpha_1^2}{\sin^2\theta}}\,d\theta+\alpha_1\varphi \quad (11)$$

根据哈密顿正则方程的积分（5.54）式得质点在椽力场中运动的几何积分为

$$\beta_1=\frac{\partial W}{\partial\alpha_1}=\frac{\partial W_\varphi}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial W_\theta}{\partial\alpha_1}=\varphi-\alpha_1\int\frac{d\theta}{\sqrt{\alpha_2^2-\dfrac{\alpha_1^2}{\sin^2\theta}}} \quad (12)$$

$$\beta_2=\frac{\partial W}{\partial\alpha_2}=\frac{\partial W_\theta}{\partial\alpha_2}+\frac{\partial W_r}{\partial\alpha_2}=\alpha_2\left(\int\frac{d\theta}{\sqrt{\alpha_2^2-\dfrac{\alpha_1^2}{\sin^2\theta}}}-\int\frac{dr}{r^2\sqrt{2mE+\dfrac{2Gm^2M}{r}-\dfrac{\alpha_2^2}{r^2}}}\right) \quad (13)$$

而运动积分为

$$t-t_0=\frac{\partial W}{\partial E}=\frac{\partial W_r}{\partial E}=\int\frac{m\,dr}{\sqrt{2mE+\dfrac{2Gm^2M}{r}-\dfrac{\alpha_2^2}{r^2}}} \quad (14)$$

现在我们通过（12）式与（13）式来求质点在椽力场中运动的轨道方程。为了简化计算，又不失结论的一般性，我们可以设φ＝常数，这就相当于质点的初速度在某一个子午面内。由（12）式可知，当φ与β_1为常数时，必须$\alpha_1=0$。于是，由（5.54）式的第一个方程与（10）式的第二个方程得

$$p_\theta=\frac{\partial W}{\partial\theta}=\frac{dW_\theta}{d\theta}=\alpha_2$$

或者

$$p_\theta=mr^2\dot\theta=\alpha_2\text{（常数）}$$

这是众所周知的角动量守恒定律。α_2就是初角动量。又由于我们设φ＝常数得$\alpha_1=0$，

所以（13）式又可变为

$$\beta_2=\theta-\alpha_2\int\frac{dr}{r\sqrt{2mEr^2+2Gm^2Mr-\alpha_2^2}}$$

或

$$\theta-\beta_2=\alpha_2\int\frac{dr}{r\sqrt{2mEr^2+2Gm^2Mr-\alpha_2^2}} \tag{15}$$

从积分表得到：当$a<0$时

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{a+bx+cx^2}}=\frac{1}{\sqrt{-a}}\arcsin\left(\frac{bx+2a}{x\sqrt{b^2-4ac}}\right)$$

所以（15）式的积分为

$$\theta-\beta_2=\arcsin\left(\frac{Gm^2M-\frac{\alpha_2^2}{r}}{\sqrt{G^2m^4M^2+2mE\alpha_2^2}}\right)$$

故

$$\sin(\theta-\beta_2)=\frac{Gm^2M-\frac{\alpha_2^2}{r}}{\sqrt{G^2m^4M^2+2mE\alpha_2^2}}$$

因而

$$\frac{1}{r}=\frac{Gm^2M}{\alpha_2^2}-\sqrt{\frac{G^2m^4M^2}{\alpha_2^4}+\frac{2mE}{\alpha_2^2}}\sin(\theta-\beta_2) \tag{16}$$

若令 $\beta_2=\theta_0+\frac{\pi}{2}$，那么$\sin(\theta-\beta_2)=-\cos(\theta-\theta_0)$

于是，（16）式又可表示为

$$r=\frac{1}{\frac{Gm^2M}{\alpha_2^2}+\sqrt{\left(\frac{Gm^2M}{\alpha_2^2}\right)^2+\frac{2mE}{\alpha_2^2}}\cos(\theta-\theta_0)}$$

$$=\frac{\frac{\alpha_2^2}{Gm^2M}}{1+\sqrt{1+\frac{2E\alpha_2^2}{G^2m^3M^2}}\cos(\theta-\theta_0)} \tag{17}$$

若再利用$\alpha_2=mh$，$k=GM$，$\frac{h^2}{k}=p$以及

$$e=\sqrt{1+\frac{h^2}{k^2}\left(V_0^2-\frac{2k}{r_0}\right)}$$

$$=\sqrt{1+\frac{2h^2}{k^2m}E}$$

那么，我们很容易地可以算得

$$\frac{\alpha_2^2}{Gm^2M}=\frac{m^2h^2}{km^2}=\frac{h^2}{k}=p$$

$$\sqrt{1+\frac{2Ea_2^2}{G^2m^3M^2}}=\sqrt{1+\frac{2m^2h^2E}{G^2m^3M^2}}=\sqrt{1+\frac{2h^2E}{k^2m}}=e$$

因此 $$r=\frac{p}{1+e\cos(\theta-\theta_0)} \quad \text{——轨道方程} \tag{18}$$

此方程便为焦点在引力中心的二次圆锥曲线的方程。式中p为通径，e为偏心率。

通过积分（14）式可得 $r=r(t)$，而后与（18）式联立可解得 $\theta=\theta(t)$，这样就求得质点在辏力作用下的运动规律。

当然，本题也可以直接采用平面极坐标来求解。因为有心运动是平面运动（即是二维问题），所以可直接选r，θ为相应的广义坐标，于是，质点的动能可表为

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2) \tag{1'}$$

由于广义动量为

$$p_r=\frac{\partial T}{\partial \dot{r}}=m\dot{r}$$

$$p_\theta=\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}=mr^2\dot{\theta}$$

所以

$$\dot{r}=\frac{p_r}{m}$$

$$\dot{\theta}=\frac{p_\theta}{mr^2}$$

于是，质点的动能表达式（1）′又可表示为

$$T=\frac{1}{2m}\left(p_r^2+\frac{p_\theta^2}{r^2}\right) \tag{2'}$$

质点的引力势能为

$$V=-\frac{GmM}{r} \tag{3'}$$

因而，质点的哈密顿函数为

$$H=\left(\sum_i p_i\dot{q}_i-L\right)_{\dot{q}\to p_i}$$

$$=\frac{p_r^2}{m}+\frac{p_\theta^2}{mr^2}-\left[\frac{1}{2m}\left(p_r^2+\frac{p_\theta^2}{r^2}\right)+\frac{GmM}{r}\right]$$

$$=\frac{1}{2m}\left(p_r^2+\frac{p_\theta^2}{r^2}\right)-\frac{GmM}{r} \tag{4'}$$

由于质点在辏力场中的运动是属于稳定保守组的情况，所以

$$p_r=\frac{\partial W}{\partial r}$$

$$p_\theta=\frac{\partial W}{\partial \theta}$$

于是，质点运动的哈密顿—雅可俾方程为

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \theta}\right)^2\right]-\frac{GmM}{r}=E \tag{5)'}$$

(5)'式是一个一阶二次偏微分方程，可以用分离变量法解之。为此令

$$W(r,\ \theta)=W_r(r)+W_\theta(\theta) \tag{6)'}$$

把(6)'式代入(5)'式得

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{dW_r}{dr}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{dW_\theta}{d\theta}\right)^2\right]-\frac{GmM}{r}=E \tag{7)'}$$

分离变量，(7)'式又可表示为

$$\left(\frac{dW_\theta}{d\theta}\right)^2=r^2\left[2mE+\frac{2Gm^2M}{r}-\left(\frac{dW_r}{dr}\right)^2\right] \tag{8)'}$$

因为方程(8)'式左端是θ的函数，而右端则为r的函数，所以方程(8)'式要成立就必须方程两端同时为常数（不防设此常数为α_2^2），故有

$$\begin{cases}\left(\dfrac{dW_\theta}{d\theta}\right)^2=\alpha_2^2\\ r^2\left[2mE+\dfrac{2Gm^2M}{r}-\left(\dfrac{dW_r}{dr}\right)^2\right]=\alpha_2^2\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}\left(\dfrac{dW_\theta}{d\theta}\right)^2=\alpha_2^2\\ \left(\dfrac{dW_r}{dr}\right)^2=2mE+\dfrac{2Gm^2M}{r}-\dfrac{\alpha_2^2}{r^2}\end{cases}$$

或者

$$\begin{cases}\dfrac{dW_\theta}{d\theta}=\alpha_2\\ \dfrac{dW_r}{dr}=\sqrt{2mE+\dfrac{2Gm^2M}{r}-\dfrac{\alpha_2^2}{r^2}}\end{cases} \tag{9)'}$$

将(9)'式积分得

$$\begin{cases}W_\theta=\alpha_2\theta\\ W_r=\displaystyle\int\sqrt{2mE+\frac{2Gm^2M}{r}-\frac{\alpha_2^2}{r^2}}\,dr\end{cases} \tag{10)'}$$

因而哈密顿—雅可俾方程(5)'的解为

$$\begin{aligned}W(r,\ \theta)&=W_r+W_\theta\\&=\int\sqrt{2mE+\frac{2Gm^2M}{r}-\frac{\alpha_2^2}{r^2}}\,dr+\alpha_2\theta\end{aligned} \tag{11)'}$$

根据哈密顿正则方程的积分(5.54)式得质点在有心力场中运动的几何积分为

$$\beta_2=\frac{\partial W}{\partial\alpha_2}=\frac{\partial W_\theta}{\partial\alpha_2}+\frac{\partial W_r}{\partial\alpha_2}$$

$$=-\alpha_2\int\frac{dr}{r^2\sqrt{2mE+\dfrac{2Gm^2M}{r}-\dfrac{\alpha_2^2}{r^2}}}+\theta$$

$$=\theta-\alpha_2\int\frac{dr}{r\sqrt{2mEr^2+2Gm^2Mr-\alpha_2^2}} \tag{12'}$$

而运动积分为

$$t-t_0=\frac{\partial W}{\partial E}=\frac{\partial W_r}{\partial E}=\int\frac{mdr}{\sqrt{2mE+\frac{2Gm^2M}{r}-\frac{\alpha_2^2}{r^2}}} \tag{13'}$$

由此可见，（12)'式就是（15）式，（13)'式就是（14）式。于是，我们重复（15）式的积分步骤，仍然可得到质点在矮力场中运动的轨道方程为

$$r=\frac{p}{1+e\cos(\theta-\theta_0)} \tag{14'}$$

同样重复（14）式的积分步骤，并把结果与（14)'联立，仍然可得质点在矮力场中运动的运动规律 $r=r(t)$，$\theta=\theta(t)$。

例2. 试用哈密顿—雅可俾方程求抛射体在真空运行的规律与轨道。

解： 由于抛射体具有三个自由度，故选x，y，z为相应的广义坐标，如图5.2所示。于是，抛射体的动能为

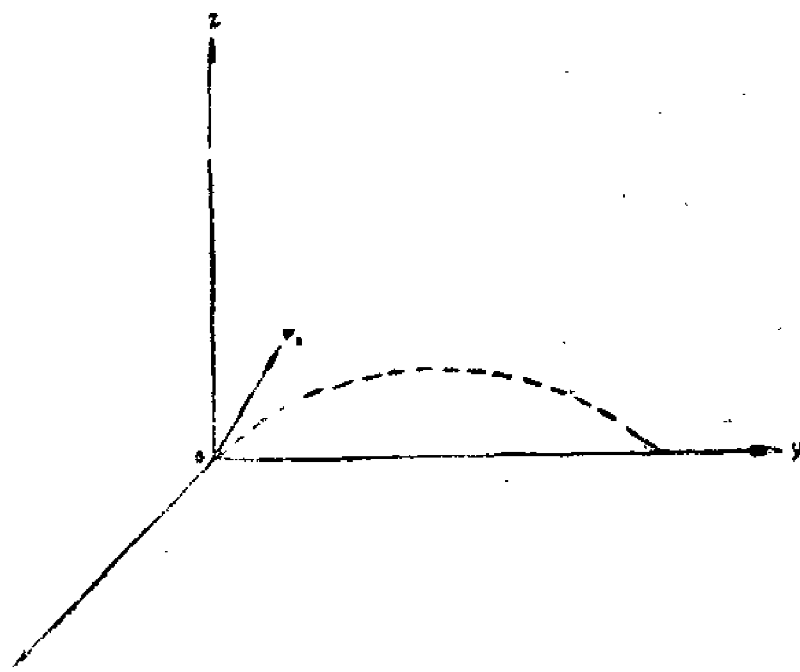


图 5.2

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)$$

式中m为抛射体的质量。若选xoy平面为势能的参考面时，那么抛射体的势能为

$$V=mgz$$

于是，抛射体的拉格朗日函数为

$$L=T-V=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)-mgz$$

由广义动量定义得

$$p_x=\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=m\dot{x}$$

$$p_y=\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}=m\dot{y}$$

$$p_z=\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}=m\dot{z}$$

故有

$$\dot{x}=\frac{p_x}{m}$$

$$\dot{y}=\frac{p_y}{m}$$

$$\dot{z}=\frac{p_z}{m}$$

因而，抛射体的哈密顿函数为

$$H=\left(\sum_i p_i\dot{q}_i-L\right)_{\dot{q}_i\to p_i}$$

$$=\frac{p_x^2}{m}+\frac{p_y^2}{m}+\frac{p_z^2}{m}-\frac{1}{2}m\left(\frac{p_x^2}{m^2}+\frac{p_y^2}{m^2}+\frac{p_z^2}{m^2}\right)+mgz$$

$$=\frac{1}{2m}\left(p_x^2+p_y^2+p_z^2\right)+mgz \qquad (1)$$

由于抛射体在重力场中的运动是属于稳定保守组的情况，所以

$$p_x=\frac{\partial W}{\partial x}$$

$$p_y=\frac{\partial W}{\partial y}$$

$$p_z=\frac{\partial W}{\partial z}$$

于是，抛射体运动的哈密顿—雅可俾方程为

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2\right]+mgz=E \qquad (2)$$

（2）式是一个一阶二次的偏微分方程，可以用分离变量法解之。为此，令

$$W(x,\ y,\ z)=W_x(x)+W_y(y)+W_z(z) \qquad (3)$$

把（3）式代入（2）式得

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{dW_x}{dx}\right)^2+\left(\frac{dW_y}{dy}\right)^2+\left(\frac{dW_z}{dz}\right)^2\right]+mgz=E \qquad (4)$$

分离变量，（4）式又可表示为

$$\left(\frac{dW_x}{dx}\right)^2=2mE-\left(\frac{dW_y}{dy}\right)^2-\left(\frac{dW_z}{dz}\right)^2-2m^2gz \qquad (5)$$

因为方程（5）式左端是x的函数，而右端则是y，z的函数，所以方程（5）的两端必须同时等于常数（不仿设此常数为a_1^2）。故有

$$
\begin{cases}
\left(\dfrac{dW_x}{dx}\right)^2=\alpha_1^2 \\
2mE-\left(\dfrac{dW_y}{dy}\right)^2-\left(\dfrac{dW_z}{dz}\right)^2-2m^2gz=\alpha_1^2
\end{cases}
$$

再一次分离变量，则上述方程组又变为

$$
\begin{cases}
\left(\dfrac{dW_x}{dx}\right)^2=\alpha_1^2 \\
\left(\dfrac{dW_y}{dy}\right)^2=2mE-\alpha_1^2-2m^2gz-\left(\dfrac{dW_z}{dz}\right)^2
\end{cases}
$$

由于上述方程组的第二个方程的左端为y的函数，而右端则为z的函数，所以上述方程组的第二个方程要成立必须方程两端同时等于常数（不防设此常数为α_2^2）。于是，又有

$$
\begin{cases}
\left(\dfrac{dW_x}{dx}\right)^2=\alpha_1^2 \\
\left(\dfrac{dW_y}{dy}\right)^2=\alpha_2^2 \\
\left(\dfrac{dW_z}{dz}\right)^2=2mE-\alpha_1^2-\alpha_2^2-2m^2gz
\end{cases}
$$

或者

$$
\begin{cases}
\dfrac{dW_x}{dx}=\alpha_1 \\
\dfrac{dW_y}{dy}=\alpha_2 \\
\dfrac{dW_z}{dz}=\sqrt{2mE-\alpha_1^2-\alpha_2^2-2m^2gz}
\end{cases}
\tag{6}
$$

积分（6）式得

$$
\begin{aligned}
W_x&=\alpha_1x \\
W_y&=\alpha_2y \\
W_z&=\int\sqrt{2mE-\alpha_1^2-\alpha_2^2-2m^2gz}\;dz \\
&=-\frac{1}{3m^2g}\left(2mE-\alpha_1^2-\alpha_2^2-2m^2gz\right)^{\frac{3}{2}}
\end{aligned}
\tag{7}
$$

因而哈密顿—雅可俾方程（2）的解为

$$
\begin{aligned}
W(x,\ y,\ z)&=W_x+W_y+W_z \\
&=\alpha_1x+\alpha_2y-\frac{1}{3m^2g}\left(2mE-\alpha_1^2-\alpha_2^2-2m^2gz\right)^{\frac{3}{2}}
\end{aligned}
\tag{8}
$$

根据哈密顿正则方程的积分（5.54）式得抛射体在重力场中运动的几何积分为

$$
\begin{cases}
\beta_1=\dfrac{\partial W}{\partial\alpha_1}=x+\dfrac{\alpha_1}{m^2g}\left(2mE-\alpha_1^2-\alpha_2^2-2m^2gz\right)^{\frac{1}{2}} \\
\beta_2=\dfrac{\partial W}{\partial\alpha_2}=y+\dfrac{\alpha_2}{m^2g}\left(2mE-\alpha_1^2-\alpha_2^2-2m^2gz\right)^{\frac{1}{2}}
\end{cases}
\tag{9}
$$

而运动积分为

$$t-t_0=\frac{\partial W}{\partial E}=-\frac{1}{mg}\left(2mE-\alpha_1^2-\alpha_2^2-2m^2gz\right)^{\frac{1}{2}} \tag{10}$$

将（10）式代入（9）式便得

$$x=\beta_1+\frac{\alpha_1}{m}(t-t_0)$$

$$y=\beta_2+\frac{\alpha_2}{m}(t-t_0) \tag{11}$$

化（10）式得

$$z=\frac{2mE-\alpha_1^2-\alpha_2^2}{2m^2g}-\frac{1}{2}g(t-t_0)^2$$

设起始时抛射体位于坐标的原点，并在oyz平面内以与水平成θ角的初速v_0抛射。于是，$t=0$时

$$x=y=z=0$$

$$p_x=\frac{\partial W}{\partial x}=\frac{dW_x}{dx}=\alpha_1=m\dot{x}=0$$

$$p_y=\frac{\partial W}{\partial y}=\frac{dW_y}{dy}=\alpha_2=m\dot{y}=mv_0\cos\theta$$

$$p_z=\frac{\partial W}{\partial z}=\frac{dW_z}{dz}=m\dot{z}=mv_0\sin\theta$$

$$E=\frac{1}{2}mv_0^2$$

把上述的起始条件代入（11）式得

$$\begin{cases}\beta_1=0\\ \beta_2=v_0\cos\theta\cdot t_0\\ \dfrac{2m\left(\frac{1}{2}mv_0^2\right)-(mv_0\cos\theta)^2}{2m^2g}-\dfrac{1}{2}gt_0^2=0\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}\beta_1=0\\ \beta_2=\dfrac{v_0^2\sin\theta\cos\theta}{g}\\ t_0=\dfrac{v_0\sin\theta}{g}\end{cases} \tag{12}$$

把（12）式代入（11）式便得抛射体的运动规律为

$$\begin{cases}x=0\\ y=\dfrac{v_0^2\sin\theta\cos\theta}{g}+v_0\cos\theta\left(t-\dfrac{v_0\sin\theta}{g}\right)=v_0\cos\theta\cdot t\\ z=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{v_0^2\sin^2\theta}{g}-\dfrac{1}{2}g\left(t-\dfrac{v_0\sin\theta}{g}\right)^2=v_0\sin\theta\cdot t-\dfrac{1}{2}gt^2\end{cases} \tag{13}$$

把α_1，α_2，E以及β_2的值代入几何积分（9）式的第二个方程得

$$\frac{v_0^2\sin\theta\cos\theta}{g}=y+\frac{v_0\cos\theta}{mg}\left(2m\cdot\frac{1}{2}mv_0^2-m^2v_0^2\cos^2\theta-2m^2gz\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=y+\frac{v_0\cos\theta}{mg}\left(m^2v_0^2\sin^2\theta-2m^2gz\right)^{\frac{1}{2}}$$

故有

$$\left(\frac{v_0^2\sin\theta\cos\theta}{g}-y\right)^2=\frac{v_0^2\cos^2\theta}{m^2g^2}\left(m^2v_0^2\sin^2\theta-2m^2gz\right)$$

即

$$\frac{v_0^4\sin^2\theta\cos^2\theta}{g^2}-\frac{2v_0^2\sin\theta\cos\theta}{g}y+y^2=\frac{v_0^4\sin^2\theta\cos^2\theta}{g^2}-\frac{2v_0^2\cos^2\theta}{g}z$$

或者

$$z=\mathrm{tg}\theta\cdot y-\frac{gy^2}{2v_0^2\cos^2\theta} \tag{14}$$

方程（14）便为抛物线方程。

例3. 在重力作用下的质点被限制在具有铅垂轴的半径为R的固定光滑园柱面表面上而运动，此质点具有水平初速v_0。证明，若将园柱展开成为平面，则点的轨迹为抛物线。

解：由于质点具有二个自由度，故选 θ，z 为相应的广义坐标，如图5.3所示。于是质点的动能为

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{R}^2+R^2\dot{\theta}^2+\dot{z}^2)$$

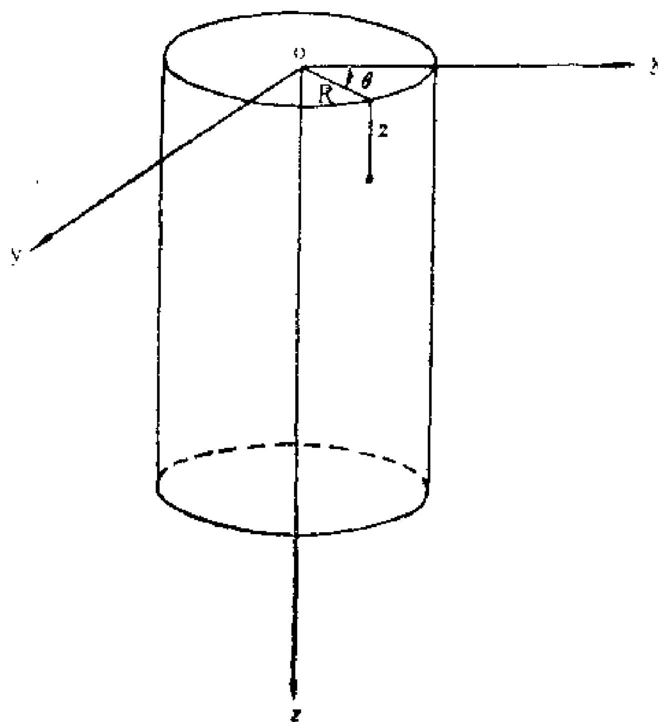


图5.3

因为R为常数，所以$\dot{R}=0$，故上述动能的表达式又可表示为

$$T=\frac{1}{2}m(R^2\dot{\theta}^2+\dot{z}^2)$$

若选开始时刻质点所在的oxy平面为势能的参考面时，那么质点的势能为

$$V=-mgz$$

式中m为质点的质量。于是，质点的拉格朗日函数为

$$L=T-V=\frac{1}{2}m(R^2\dot{\theta}^2+\dot{z}^2)+mgz$$

由广义动量的定义得

$$p_\theta=\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=mR^2\dot{\theta}$$

$$p_z=\frac{\partial L}{\partial\dot{z}}=m\dot{z}$$

故有

$$\dot{\theta}=\frac{p_\theta}{mR^2}$$

$$\dot{z}=\frac{p_z}{m}$$

因此，质点的哈密顿函数为

$$H=\left(\sum_i p_i\dot{q}_i-L\right)_{\dot{q}\to p_i}$$

$$=\frac{p_\theta^2}{mR^2}+\frac{p_z^2}{m}-\frac{1}{2}m\left(\frac{R^2p_\theta^2}{m^2R^4}+\frac{p_z^2}{m^2}\right)-mgz$$

$$=\frac{1}{2m}\left(\frac{p_\theta^2}{R^2}+p_z^2\right)-mgz \tag{1}$$

由于质点在重力场中的运动是属于稳定保守的情况，所以

$$p_\theta=\frac{\partial W}{\partial\theta}$$

$$p_z=\frac{\partial W}{\partial z}$$

$$H=E$$

于是，质点运动的哈密顿—雅可俾方程为

$$\frac{1}{2m}\left[\frac{1}{R^2}\left(\frac{\partial W}{\partial\theta}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2\right]-mgz=E \tag{2}$$

（2）式是一个一阶二次的偏微分方程，可以用分离变量法解之。为此，令

$$W(\theta,\ z)=W_\theta(\theta)+W_z(z) \tag{3}$$

将（3）式代入（2）式得

$$\frac{1}{2m}\left[\frac{1}{R^2}\left(\frac{dW_\theta}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dW_z}{dz}\right)^2\right]-mgz=E \tag{4}$$

分离变量，（4）式又可表示为

$$\left(\frac{dW_\theta}{d\theta}\right)^2=2mR^2E+2m^2gR^2z-R^2\left(\frac{dW_z}{dz}\right)^2 \tag{5}$$

因为方程（5）式的左端是θ的函数，而右端则为z的函数，所以方程（5）要成立就必须两端同时等于常数（不仿设此常数为α_1^2）。故有

$$\begin{cases}\left(\dfrac{dW_\theta}{d\theta}\right)^2=\alpha_1^2\\[2mm] 2mR^2E+2m^2gR^2z-R^2\left(\dfrac{dW_z}{dz}\right)^2=\alpha_1^2\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}\dfrac{dW_\theta}{d\theta}=\alpha_1\\[2mm] \dfrac{dW_z}{dz}=\sqrt{2mE+2m^2gz-\dfrac{\alpha_1^2}{R^2}}\end{cases} \tag{6}$$

积分（6）式得

$$\begin{cases}W_\theta=\alpha_1\theta\\[2mm] W_z=\displaystyle\int\sqrt{2mE+2m^2gz-\frac{\alpha_1^2}{R^2}}\,dz\end{cases} \tag{7}$$

因而哈密顿—雅可俾方程（2）的解为

$$\begin{aligned}W(\theta,\ z)&=W_\theta(\theta)+W_z(z)\\&=\alpha_1\theta+\int\sqrt{2mE+2m^2gz-\frac{\alpha_1^2}{R^2}}\,dz\end{aligned} \tag{8}$$

根据哈密顿正则方程的积分（5.54）式得质点在重力场中运动的几何积分为

$$\begin{aligned}\beta_1&=\frac{\partial W}{\partial\alpha_1}\\&=\theta-\frac{\alpha_1}{R^2}\int\frac{dz}{\sqrt{2mE+2m^2gz-\dfrac{\alpha_1^2}{R^2}}}\\&=\theta-\frac{\alpha_1}{R^2}\int\frac{dz}{\sqrt{2mE-\dfrac{\alpha_1^2}{R^2}+2m^2gz}}\\&=\theta-\frac{\alpha_1}{m^2gR^2}\sqrt{2mE-\frac{\alpha_1^2}{R^2}+2m^2gz}\end{aligned}$$

即

$$\frac{\alpha_1}{m^2gR^2}\sqrt{2mE-\frac{\alpha_1^2}{R^2}+2m^2gz}=(\theta-\beta_1)$$

或者

$$z=\frac{m^2gR}{2\alpha^2}(\theta-\beta_1)^2-\frac{E}{mg}+\frac{\alpha_1^2}{2m^2gR^2}$$

考虑到$S=R\theta$，故上式又可表示为

$$z=\frac{m^2gR^2}{2\alpha_1^2}(S-R\beta_1)^2-\frac{E}{mg}+\frac{\alpha_1^2}{2m^2gR^2} \tag{9}$$

而质点的运动积分为

$$t-t_0=\frac{\partial W}{\partial E}=\frac{\partial W_z}{\partial E}=\int\frac{mdz}{\sqrt{2mE-\frac{\alpha_1^2}{R^2}+2m^2gz}}$$

$$=\frac{1}{mg}\sqrt{2mE-\frac{\alpha_1^2}{R^2}+2m^2gz}$$

即

$$mg(t-t_0)=\sqrt{2mE-\frac{\alpha_1^2}{R^2}+2m^2gz}$$

或者

$$z=\frac{1}{2}g(t-t_0)^2-\frac{E}{mg}+\frac{\alpha_1^2}{2m^2gR^2} \qquad (10)$$

由起始条件$t=0$时，$\theta=0$，$z=0$，$R\dot{\theta}=v_0$

$$p_\theta=\frac{\partial W}{\partial\theta}=\frac{\partial W_\theta}{\partial\theta}=\alpha_1=mR^2\dot{\theta}=mRv_0$$

$$E=\frac{1}{2}mv_0^2$$

把此初始条件代入（9）式与（10）式便得$\beta_1=0$，$t_0=0$于是（9）式就变为

$$z=\frac{g}{2v_0^2}S^2 \qquad (11)$$

故当将圆柱面展为平面时，质点的运动轨迹为抛物线得证。

例4. 试用哈密顿—雅可俾方程解第三章例题7。

解：由于质点的哈密顿函数为

$$H=\frac{1}{2m}\left(\frac{p_\varphi^2}{R^2}+p_z^2\right)+\frac{1}{2}k(R^2+z^2) \qquad (1)$$

又质点在引力场中的运动是属于稳定保守组的情况，所以

$$p_\varphi=\frac{\partial W}{\partial\varphi}$$

$$p_z=\frac{\partial W}{\partial z}$$

于是，质点运动的哈密顿—雅可俾方程为

$$\frac{1}{2m}\left[\frac{1}{R^2}\left(\frac{\partial W}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2\right]+\frac{1}{2}k(R^2+z^2)=E \qquad (2)$$

（2）式是一个一阶二次偏微分方程，可以用分离变量法解之，为此，令

$$W(\varphi,z)=W_\varphi(\varphi)+W_z(z) \qquad (3)$$

把（3）式代入（2）式得

$$\frac{1}{2m}\left[\frac{1}{R^2}\left(\frac{dW_\varphi}{d\varphi}\right)^2+\left(\frac{dW_z}{dz}\right)^2\right]+\frac{1}{2}k(R^2+z^2)=E \qquad (4)$$

分离变量，（4）式又可表示为

$$\frac{1}{R^2}\left(\frac{dW_\varphi}{d\varphi}\right)^2=2mE-\frac{1}{2}\cdot 2mk(R^2+z^2)-\left(\frac{dW_z}{dz}\right)^2$$

即

$$\left(\frac{dW_\varphi}{d\varphi}\right)^2=2mR^2E-mR^2k(R^2+z^2)-R^2\left(\frac{dW_z}{dz}\right)^2 \qquad (5)$$

因为方程式（5）的左端是φ的函数，而右端则为z的函数，所以方程（5）式要成立就必须两端同时等于常数（不仿设此常数为α_1^2）。故有

$$\begin{cases}\left(\dfrac{dW_\varphi}{d\varphi}\right)^2=\alpha_1^2\\ 2mR^2E-mR^2k(R^2+z^2)-R^2\left(\dfrac{dW_z}{dz}\right)^2=\alpha_1^2\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}\dfrac{dW_\varphi}{d\varphi}=\alpha_1\\ \dfrac{dW_z}{dz}=\sqrt{2mE-mk(R^2+z^2)-\dfrac{\alpha_1^2}{R^2}}\end{cases} \qquad (6)$$

积分（6）式得

$$W_\varphi=\alpha_1\varphi$$

$$W_z=\int\sqrt{2mE-mkR^2-\frac{\alpha_1^2}{R^2}-mkz^2}\,dz \qquad (7)$$

因而，哈密顿—雅可俾方程（2）的解为

$$W(\varphi,z)=W_\varphi+W_z$$

$$=\alpha_1\varphi+\int\sqrt{2mE-mkR^2-\frac{\alpha_1^2}{R^2}-mkz^2}\,dz \qquad (8)$$

根据哈密顿正则方程的积分（5.54）式得质点在有心力场中运动的几何积分为

$$\beta_1=\frac{\partial W}{\partial\alpha_1}$$

$$=\varphi-\frac{\alpha_1}{R^2}\int\frac{dz}{\sqrt{2mE-mkR^2-\dfrac{\alpha_1^2}{R^2}-mkz^2}}$$

$$=\varphi-\frac{\alpha_1}{R^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{mk}}\arcsin\left(\frac{\sqrt{mk}\,z}{\sqrt{2mE-mkR^2-\dfrac{\alpha_1^2}{R^2}}}\right)$$

即

$$\frac{R^2\sqrt{mk}}{\alpha_1}(\varphi-\beta_1)=\arcsin\left(\frac{\sqrt{mk}\,z}{\sqrt{2mE-mkR^2-\dfrac{\alpha_1^2}{R^2}}}\right)$$

或者

$$\sin\left[\frac{R^2\sqrt{mk}}{\alpha_1}(\varphi-\beta_1)\right]=\frac{\sqrt{mk}\,z}{\sqrt{2mE-mkR^2-\dfrac{\alpha_1^2}{R^2}}}$$

故有

$$z=\sqrt{\frac{2E}{k}-R^2-\frac{\alpha_1{}^2}{mkR}}\sin\left[\frac{R^2\sqrt{mk}}{\alpha}(\varphi-\beta)\right] \quad (9)$$

质点的运动积分为

$$t-t_0=\frac{\partial W}{\partial E}$$

$$=\frac{\partial W_z}{\partial E}$$

$$=m\int\frac{dz}{\sqrt{2mE-mkR^2-\frac{\alpha_1{}^2}{R^2}-mkz^2}}$$

$$=\frac{m}{\sqrt{mk}}arc\sin\left(\frac{\sqrt{mk}\,z}{\sqrt{2mE-mkR^2-\frac{\alpha_1{}^2}{R^2}}}\right)$$

即

$$\sqrt{\frac{k}{m}}(t-t_0)=arc\sin\left(\frac{z}{\sqrt{\frac{2E}{k}-R^2-\frac{\alpha_1{}^2}{mkR^2}}}\right)$$

故有

$$z=\sqrt{\frac{2E}{k}-R^2-\frac{\alpha_1{}^2}{mkR^2}}\sin\left[\sqrt{\frac{k}{m}}(t-t_0)\right] \quad (10)$$

若令：

$$\sqrt{\frac{2E}{k}-R^2-\frac{\alpha_1{}^2}{mkR^2}}=A$$

$$-\sqrt{\frac{k}{m}}t_0=\alpha$$

那么（10）式又可表示为

$$z=A\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\right)t+\alpha$$

此结果与第三章的例题7的结果是一模一样的。

例5。试用哈密顿—雅可俾方程解§2—2中的例题17。

解：由于系统的动能为

$$T=\frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{r}^2+\frac{1}{2}m_1r^2\dot{\theta}^2$$

而系统的势能为

$$V=0$$

故由广义动量的定义得

$$p_r=\frac{\partial T}{\partial\dot{r}}=(m_1+m_2)\dot{r}$$

$$p_\theta=\frac{\partial T}{\partial\dot\theta}=m_1r^2\dot\theta$$

即

$$\dot r=\frac{p_r}{m_1+m_2}$$

$$\dot\theta=\frac{p_\theta}{m_1r^2}$$

于是，系统的哈密顿函数为

$$H=\left(\sum_i p_i\dot q_i-L\right)_{\dot q\to p_i}$$

$$=\frac{p_r^2}{m_1+m_2}+\frac{p_\theta^2}{m_1r^2}-\frac{1}{2}(m_1+m_2)\cdot\frac{p_r^2}{(m_1+m_2)^2}-\frac{1}{2}m_1r^2\cdot\frac{p_\theta^2}{m_1^2r^4}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{p_r^2}{m_1+m_2}+\frac{p_\theta^2}{m_1r^2}\right)\qquad(1)$$

由于系统是属于稳定保守组的情况，所以

$$p_r=\frac{\partial W}{\partial r}$$

$$p_\theta=\frac{\partial W}{\partial\theta}$$

因此，系统的哈密顿—雅可俾方程为

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{m_1+m_2}\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{m_1r^2}\left(\frac{\partial W}{\partial\theta}\right)^2\right]=E\qquad(2)$$

（2）式是一个一阶二次的偏微分方程，可以用分离变量法解之。为此令

$$W(r,\ \theta)=W_r(r)+W_\theta(\theta)\qquad(3)$$

把（3）式代入（2）式得

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{m_1+m_2}\left(\frac{dW_r}{dr}\right)^2+\frac{1}{m_1r^2}\left(\frac{dW_\theta}{d\theta}\right)^2\right]=E\qquad(4)$$

分离变量，（4）式又可表示为

$$\frac{1}{m_1r^2}\left(\frac{dW_\theta}{d\theta}\right)^2=2E-\frac{1}{m_1+m_2}\left(\frac{dW_r}{dr}\right)^2$$

即

$$\left(\frac{dW_\theta}{d\theta}\right)^2=2m_1Er^2-\frac{m_1r^2}{m_1+m_2}\left(\frac{dW_r}{dr}\right)^2\qquad(5)$$

因为方程（5）式的左端是θ的函数，而右端则为r的函数，所以方程（5）式要成立就必须两端同时等于常数（不仿假设此常数为α_1^2），故有

$$\begin{cases}\left(\dfrac{dW_\theta}{d\theta}\right)^2=\alpha_1^2\\[2ex] 2m_1Er^2-\dfrac{m_1r^2}{m_1+m_2}\left(\dfrac{dW_r}{dr}\right)^2=\alpha_1^2\end{cases}$$

即

$$\begin{cases} \dfrac{dW_\theta}{d\theta}=\alpha_1 \\ \dfrac{dW_r}{dr}=\sqrt{2E(m_1+m_2)-\dfrac{(m_1+m_2)}{m_1}\cdot\dfrac{\alpha_1^2}{r^2}} \end{cases} \tag{6}$$

积分（6）式得

$$\begin{cases} W_\theta=\alpha_1\theta \\ W_r=\displaystyle\int\sqrt{2E(m_1+m_2)-\frac{m_1+m_2}{m_1}\cdot\frac{\alpha_1^2}{r^2}}\,dr \end{cases} \tag{7}$$

因而哈密顿—雅可俾方程（2）的解为

$$\begin{aligned} W(r,\theta)&=W_r(r)+W_\theta(\theta) \\ &=\alpha_1\theta+\int\sqrt{2E(m_1+m_2)-\frac{m_1+m_2}{m_1}\cdot\frac{\alpha_1^2}{r^2}}\,dr \end{aligned} \tag{8}$$

根据哈密顿正则方程的积分（5.54）式得小球m_1的几何积分为

$$\begin{aligned} \beta_1&=\frac{\partial W}{\partial\alpha_1} \\ &=\frac{\partial W_\theta}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial W_r}{\partial\alpha_1} \\ &=\theta-\frac{m_1+m_2}{m_1}\int\frac{\alpha_1}{r^2}\cdot\frac{dr}{\sqrt{2E(m_1+m_2)-\dfrac{m_1+m_2}{m_1}\cdot\dfrac{\alpha_1^2}{r^2}}} \\ &=\theta-\frac{(m_1+m_2)\alpha_1}{m_1}\int\frac{dr}{r\sqrt{2E(m_1+m_2)r^2-\dfrac{(m_1+m_2)}{m_1}\alpha_1^2}} \\ &=\theta-\frac{(m_1+m_2)\alpha_1}{m_1}\cdot\frac{1}{\sqrt{2E(m_1+m_2)}}\int\frac{dr}{r\sqrt{r^2-\dfrac{(m_1+m_2)\alpha_1^2}{2Em_1(m_1+m_2)}}} \\ &=\theta-\frac{(m_1+m_2)\alpha_1}{m_1}\cdot\frac{1}{\sqrt{2E(m_1+m_2)}}\int\frac{dr}{r\sqrt{r^2-\dfrac{\alpha_1^2}{2m_1E}}} \\ &=\theta-\frac{\alpha_1}{m_1}\sqrt{\frac{m_1+m_2}{2E}}\int\frac{dr}{r\sqrt{r^2-\left(\dfrac{\alpha_1}{\sqrt{2m_1E}}\right)^2}} \\ &=\theta-\alpha_1\sqrt{\frac{m_1+m_2}{m_1}\cdot\frac{1}{2m_1E}}\int\frac{dr}{r\sqrt{r^2-\left(\dfrac{\alpha_1}{\sqrt{2m_1E}}\right)^2}} \\ &=\theta-\alpha_1\sqrt{\frac{m_1+m_2}{m_1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2m_1E}}\int\frac{dr}{r\sqrt{r^2-\left(\dfrac{\alpha_1}{\sqrt{2m_1E}}\right)^2}} \end{aligned}$$

$$= \theta - \alpha_1\sqrt{\frac{m_1+m_2}{m_1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2m_1E}} \cdot \frac{1}{\frac{\alpha_1}{\sqrt{2m_1E}}} arc\cos\left(\frac{\frac{\alpha_1}{\sqrt{2m_1E}}}{r}\right)$$

$$= \theta - \sqrt{\frac{m_1+m_2}{m_1}} arc\cos\left(\frac{\frac{\alpha_1}{\sqrt{2m_1E}}}{r}\right)$$

即

$$arc\cos\left(\frac{\frac{\alpha_1}{\sqrt{2m_1E}}}{r}\right) = \sqrt{\frac{m_1}{m_1+m_2}}(\theta-\beta_1)$$

或者

$$\cos\left[\sqrt{\frac{m_1}{m_1+m_2}}(\theta-\beta_1)\right] = \frac{\frac{\alpha_1}{\sqrt{2m_1E}}}{r}$$

故有

$$r = \frac{\frac{\alpha_1}{\sqrt{2m_1E}}}{\cos\left[\sqrt{\frac{m_1}{m_1+m_2}}(\theta-\beta_1)\right]}$$

而运动积分为

$$t - t_0 = \frac{\partial W}{\partial E}$$

$$= \frac{\partial W_r}{\partial E}$$

$$= \int \frac{(m_1+m_2)dr}{\sqrt{2E(m_1+m_2) - \frac{m_1+m_2}{m_1} \cdot \frac{\alpha_1^2}{r^2}}}$$

$$= (m_1+m_2)\int \frac{dr}{\frac{1}{r}\sqrt{2E(m_1+m_2)r^2 - \frac{m_1+m_2}{m_1}\alpha_1^2}}$$

$$= \frac{(m_1+m_2)}{\sqrt{2E(m_1+m_2)}}\int \frac{rdr}{\sqrt{r^2 - \frac{m_1+m_2}{m_1} \cdot \frac{\alpha_1^2}{2E(m_1+m_2)}}}$$

$$= \sqrt{\frac{m_1+m_2}{2E}}\int \frac{rdr}{\sqrt{r^2 - \left(\frac{\alpha_1}{\sqrt{2m_1E}}\right)^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{m_1+m_2}{2E}}\int\frac{d\left[r^2-\left(\frac{\alpha_1}{\sqrt{2m_1E}}\right)^2\right]}{2\sqrt{r^2-\left(\frac{\alpha_1}{\sqrt{2m_1E}}\right)^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{m_1+m_2}{2E}}\cdot\sqrt{r^2-\left(\frac{\alpha_1}{\sqrt{2m_1E}}\right)^2}$$

即

$$\sqrt{\frac{2E}{m_1+m_2}}(t-t_0)=\sqrt{r^2-\left(\frac{\alpha_1}{\sqrt{2m_1E}}\right)^2}$$

或者

$$r=\sqrt{\frac{2E}{m_1+m_2}(t-t_0)^2+\left(\frac{\alpha_1}{\sqrt{2m_1E}}\right)^2} \tag{10}$$

把初始条件，当$t=0$时，$r=a$，$\alpha_1=p_\theta=am_1u$，$E=\frac{1}{2}m_1u^2$代入（10）式得

$$a=\sqrt{\frac{m_1u^2}{m_1+m_2}(-t_0)^2+\left(\frac{am_1u}{m_1u}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{m_1u^2}{m_1+m_2}t_0^2+a^2}$$

于是，$t_0=0$。

把初始条件：当$t=0$时，$r=a$，$\theta=0$，$\alpha_1=am_1u$，$E=\frac{1}{2}m_1u^2$代入（9）式得

$$a=\frac{\frac{am_1u}{m_1u}}{\cos\left(-\sqrt{\frac{m_1}{m_1+m_2}}\beta_1\right)}$$

$$=\frac{a}{\cos\left(-\sqrt{\frac{m_1}{m_1+m_2}}\beta_1\right)}$$

于是，$\beta_1=0$。因此，（9）式可改写为

$$r=\frac{a}{\cos\left(\sqrt{\frac{m_1}{m_1+m_2}}\theta\right)} \tag{11}$$

（10）式也可改写为

$$r=\sqrt{\frac{m_1u^2}{m_1+m_2}t^2+a^2} \tag{12}$$

若令　$n=u\sqrt{\frac{m_1}{m_1+m_2}}$，那么，（11）式又可改写为

$$r=\sqrt{n^2t^2+a^2} \tag{13}$$

（12）式又可改写为

$$r=\frac{a}{\cos\left(\frac{n}{u}\theta\right)} \tag{14}$$

把（13）式代入（14）式得

$$\sqrt{n^2t^2+a^2}=\frac{a}{\cos\left(\frac{n}{u}\theta\right)}$$

即

$$\cos\left(\frac{n}{u}\theta\right)=\frac{a}{\sqrt{n^2t^2+a^2}}$$

故

$$\sin\left(\frac{n}{u}\theta\right)=\sqrt{1-\frac{a^2}{n^2t^2+a^2}}=\sqrt{\frac{n^2t^2}{n^2t^2+a^2}}=\frac{nt}{\sqrt{n^2t^2+a^2}}$$

于是，

$$tg\left(\frac{n}{u}\theta\right)=\frac{nt}{a}$$

或者

$$\theta=\frac{u}{n}arc\ tg\left(\frac{nt}{a}\right)$$

因此，小球m_1的运动规律为

$$\begin{cases} r=\sqrt{n^2t^2+a^2} \\ \theta=\frac{u}{n}arc\ tg\left(\frac{nt}{a}\right) \end{cases}$$

由此可见，此结果与§2—2中的例题17的结果是一模一样。

例6. 试用哈密顿—雅可俾方程解§2—2中的例题22。

解： 由于系统的动能为

$$T=\frac{1}{2}Ma^2\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)$$
$$=\frac{1}{2}m\dot{r}^2+\frac{1}{2}(Ma^2+mr^2)\dot{\theta}^2$$

而系统的势能为

$$V=0$$

故由广义动量的定义得

$$p_r=\frac{\partial T}{\partial \dot{r}}=m\dot{r}$$

$$p_\theta=\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}=(Ma^2+mr^2)\dot{\theta}$$

即

$$\dot{r}=\frac{p_r}{m}$$

$$\dot{\theta}=\frac{p_\theta}{Ma^2+mr^2}$$

于是，系统的哈密顿函数为

$$H=\left(\sum_i p_i\dot{q}_i-L\right)_{\dot{q}_i\to p_i}$$

$$=\frac{p_r^2}{m}+\frac{p_\theta^2}{ma^2+mr^2}-\frac{1}{2}m\cdot\frac{p_r^2}{m^2}-\frac{1}{2}(Ma^2+mr^2)\cdot\frac{p_\theta^2}{(Ma^2+mr^2)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{p_r^2}{m}+\frac{p_\theta^2}{ma^2+mr^2}\right) \qquad (1)$$

由于系统是属于稳定保守组的情况，所以

$$p_r=\frac{\partial W}{\partial r}$$

$$p_\theta=\frac{\partial W}{\partial \theta}$$

因此，系统的哈密顿一雅可俾方程为

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{m}\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{ma^2+mr^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \theta}\right)^2\right]=E \qquad (2)$$

（2）式是一个一阶二次偏微分方程，可以用分离变量法解之。为此，令

$$W(r,\ \theta)=W_r(r)+W_\theta(\theta) \qquad (3)$$

把（3）式代入（2）式得

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{m}\left(\frac{dW_r}{dr}\right)^2+\frac{1}{Ma^2+mr^2}\left(\frac{dW_\theta}{d\theta}\right)^2\right]=E \qquad (4)$$

分离变量，（4）式又可表示为

$$\frac{1}{Ma^2+mr^2}\left(\frac{dW_\theta}{d\theta}\right)^2=2E-\frac{1}{m}\left(\frac{dW_r}{dr}\right)^2$$

即

$$\left(\frac{dW_\theta}{d\theta}\right)^2=2E(Ma^2+mr^2)-\frac{Ma^2+mr^2}{m}\left(\frac{dW_r}{dr}\right)^2 \qquad (5)$$

因为方程（5）式的左端是θ的函数，而右端则为r的函数，所以方程（5）式要成立就必须两端同时等于常数（不仿设此常数为α_1^2），故有

$$\begin{cases}\left(\dfrac{dW_\theta}{d\theta}\right)^2=\alpha_1^2\\ 2E(Ma^2+mr^2)-\dfrac{Ma^2+mr^2}{m}\left(\dfrac{dW_r}{dr}\right)^2=\alpha_1^2\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}\dfrac{dW_\theta}{d\theta}=\alpha_1\\ \dfrac{dW_r}{dr}=\sqrt{2Em-\dfrac{m\alpha_1^2}{Ma^2+mr^2}}\end{cases} \qquad (6)$$

积分（ 6 ）式得

$$\begin{cases} W_\theta = \alpha_1 \theta \\ W_r = \int \sqrt{2Em - \dfrac{m\alpha_1^2}{Ma^2 + mr^2}}\, dr \end{cases} \tag{7}$$

因而哈密顿—雅可俾方程（ 2 ）的解为

$$W(r,\ \theta) = W_r(r) + W_\theta(\theta)$$

$$= \alpha_1 \theta + \int \sqrt{2Em - \frac{m\alpha_1^2}{Ma^2 + mr^2}}\, dr \tag{8}$$

根据哈密顿正则方程的积分（ 5.54 ）式得小环的运动积分为

$$t - t_0 = \frac{\partial W}{\partial E}$$

$$= \frac{\partial W_r}{\partial E}$$

$$= \int \frac{m dr}{\sqrt{2Em - \dfrac{m\alpha_1^2}{Ma^2 + mr^2}}}$$

$$= \int \frac{\sqrt{m(Ma^2 + mr^2)}}{\sqrt{2E(Ma^2 + mr^2) - \alpha_1^2}}\, dr$$

$$= \int \sqrt{\frac{m(Ma^2 + mr^2)}{2E(Ma^2 + mr^2) - \alpha_1^2}}\, dr \tag{9}$$

将（ 9 ）式两端同时对 t 求导得

$$1 = \sqrt{\frac{m(Ma^2 + mr^2)}{2E(Ma^2 + mr^2) - \alpha_1^2}} \cdot \frac{dr}{dt}$$

故

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2E(Ma^2 + mr^2) - \alpha_1^2}{m(Ma^2 + mr^2)}} \tag{10}$$

把初始条件：$t=0$时 $r = r_0$，$\alpha_1 = (Ma^2 + mr_0^2)\omega_0$，$E = \frac{1}{2}(Ma^2 + mr_0^2)\omega_0^2$代入(10)式得

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{(Ma^2 + mr_0^2)\omega_0^2(Ma^2 + mr^2) - (Ma^2 + mr_0^2)^2\omega_0^2}{m(Ma^2 + mr^2)}}$$

$$= \sqrt{\frac{(Ma^2 + mr_0^2)\omega_0^2(Ma^2 + mr^2 - Ma^2 - mr_0^2)}{m(Ma^2 + mr^2)}}$$

$$= \omega_0 \sqrt{\frac{Ma^2 + mr_0^2}{Ma^2 + mr^2}(r^2 - r_0^2)} \tag{11}$$

而几何积分为

$$\beta_1 = \frac{\partial W}{\partial \alpha_1}$$

$$= \frac{\partial W_\theta}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial W_r}{\partial \alpha_1}$$

$$=\theta-\alpha_1\int\frac{\frac{m}{Ma^2+mr^2}\,dr}{\sqrt{2Em-\frac{m\alpha_1{}^2}{Ma^2+mr^2}}}$$

$$=\theta-\alpha_1\int\frac{\frac{m}{Ma^2+mr^2}\cdot\sqrt{Ma^2+mr^2}}{\sqrt{m}\cdot\sqrt{2E(Ma^2+mr^2)-\alpha_1{}^2}}\,dr$$

$$=\theta-\alpha_1\int\frac{\frac{\sqrt{m^2}}{\sqrt{Ma^2+mr^2}}}{\sqrt{m}\cdot\sqrt{2E(Ma^2+mr^2)-\alpha_1{}^2}}\,dr$$

$$=\theta-\alpha_1\int\frac{\sqrt{m}\,dr}{\sqrt{2E(Ma^2+mr^2)^2-\alpha_1{}^2(Ma^2+mr^2)}}$$

$$=\theta-\alpha_1\int\sqrt{\frac{m}{(Ma^2+mr^2)[2E(Ma^2+mr^2)-\alpha_1{}^2]}}\,dr \tag{12}$$

将（12）式两端同时对θ求导得

$$0=1-\alpha_1\sqrt{\frac{m}{(Ma^2+mr^2)[2E(Ma^2+mr^2)-\alpha_1{}^2]}}\cdot\frac{dr}{d\theta}$$

故

$$\frac{dr}{d\theta}=\frac{1}{\alpha_1}\sqrt{\frac{(Ma^2+mr^2)[2E(Ma^2+mr^2)-\alpha_1{}^2]}{m}} \tag{13}$$

把$E=\frac{1}{2}(Ma^2+mr_0{}^2)\omega_0{}^2$ 与$\alpha_1=(Ma^2+mr_0{}^2)\omega_0$代入（13）式便得

$$\frac{dr}{d\theta}=\frac{1}{(Ma^2+mr_0^2)\omega_0}\sqrt{\frac{(Ma^2+mr^2)[(Ma^2+mr_0^2)\omega_0^2(Ma^2+mr^2)-(Ma^2+mr_0^2)^2\omega_0^2]}{m}}$$

$$=\frac{1}{(Ma^2+mr_0^2)\omega_0}\sqrt{\frac{(Ma^2+mr^2)(Ma^2+mr_0^2)\omega_0^2(Ma^2+mr^2-Ma^2-mr_0{}^2)}{m}}$$

$$=\sqrt{\frac{Ma^2+mr^2}{Ma^2+mr_0{}^2}(r^2-r_0{}^2)}$$

于是，小环的速度（指相对于杆子的速度）为

$$u=\frac{dr}{dt}=\omega_0\sqrt{\frac{Ma^2+mr_0^2}{Ma^2+mr^2}(r^2-r_0{}^2)}$$

而小环的轨迹在极坐标中的微分方程式为

$$\frac{dr}{d\theta}=\sqrt{\frac{Ma^2+mr^2}{Ma^2+mr_0{}^2}(r^2-r_0{}^2)}$$

由此可见，此结果与§2—2中的例题22的结果也是一模一样的。

例7. 试用哈密顿—雅可俾方程解简谐振动问题。

解： 设弹簧的刚性系数为k，振子的质量为m。由于系统具有一个自由度，故选x为相应的广义坐标，如图5.4所示。于是，系统的动能为

$$T=\frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

若选平衡位置o为系统势能的参考点时，那么系统的势能为

$$V=\frac{1}{2}kx^2$$

由广义动量的定义得

$$p_x=\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}=m\dot{x}$$

故有

$$\dot{x}=\frac{p_x}{m}$$

于是，系统的哈密顿函数为

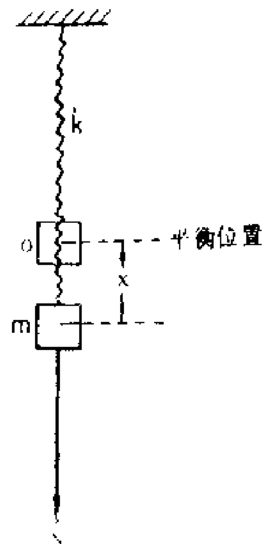


图5.4

$$H=\left(\sum_l p_l\dot{q}_l-L\right)_{\dot{q}_l\to p_l}$$

$$=\frac{p_x^2}{m}-\left(\frac{1}{2}m\cdot\frac{p_x^2}{m^2}-\frac{1}{2}kx^2\right)$$

$$=\frac{p_x^2}{2m}+\frac{1}{2}kx^2 \tag{1}$$

由于弹簧振子在重力场中的运动是属于稳定保守组的情况，所以

$$p_x=\frac{\partial W}{\partial x}$$

因此，系统的哈密顿一雅可俾方程为

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2+\frac{1}{2}kx^2=E \tag{2}$$

因为$W=W(x)$，所以（2）式又可表示为

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{dW}{dx}\right)^2+\frac{1}{2}kx^2=E \tag{3}$$

即

$$\frac{dW}{dx}=\sqrt{2mE-mkx^2}$$

积分上式得

$$W=\int\sqrt{2mE-mkx^2}\,dx \tag{4}$$

根据哈密顿正则方程的积分（5.54）式得振子在力场中运动的运动积分为

$$t-t_0=\frac{\partial W}{\partial E}$$

$$=\int\frac{m\,dx}{\sqrt{2mE-mkx^2}}$$

$$=\frac{m}{\sqrt{mk}}\arcsin\left(\frac{\sqrt{mk}\,x}{\sqrt{2mE}}\right)$$

即

$$\sqrt{\frac{k}{m}}(t-t_0)=\arcsin\left(\frac{\sqrt{mk}\,x}{\sqrt{2mE}}\right)$$

或者

$$\sin\left[\sqrt{\frac{k}{m}}\ (t-t_0)\right]=\frac{\sqrt{mk}}{\sqrt{2mE}}x$$

故有

$$x=\sqrt{\frac{2E}{k}}\sin\left[\sqrt{\frac{k}{m}}\ (t-t_0)\right] \qquad (5$$

设$t=0$时，$x=0$，$E=\frac{1}{2}mv_0^2$ 故得$t_0=0$，于是（5）式又可表示为

$$x=\sqrt{\frac{mv_0^2}{k}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

式中v_0为振子的初始速度。上式便是振子的运动规律。这是众所周知的简谐振动。

例8. 试用哈密顿—雅可俾方程求复摆作有限振动的周期τ。

解： 由于复摆具有一个自由度，故选φ角为相应的广义坐标，如图5.5所示。是，复摆的动能为

$$T=\frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2$$

式中J为摆对水平轴oz的转动惯量，$\dot{\varphi}$为绕oz轴的转动角速度。

若选ox轴为势能的参考点时，那么摆的势能为

$$V=-mgl\cos\varphi$$

式中m为摆的质量，l为质心C到悬挂点o的距离。

由广义动量的定义得

$$p\varphi=\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}=\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}=J\dot{\varphi}$$

故有

$$\varphi=\frac{p\varphi}{J}$$

于是，复摆的哈密顿函数为

$$H=\left(\sum_i p_i\dot{q}_i-L\right)_{\dot{q}_i\to p_i}$$

$$=\frac{p\varphi^2}{J}-\left(\frac{1}{2}J\cdot\frac{p\varphi^2}{J^2}+mgl\cos\varphi\right)$$

$$=\frac{p\varphi^2}{2J}-mgl\cos\varphi$$

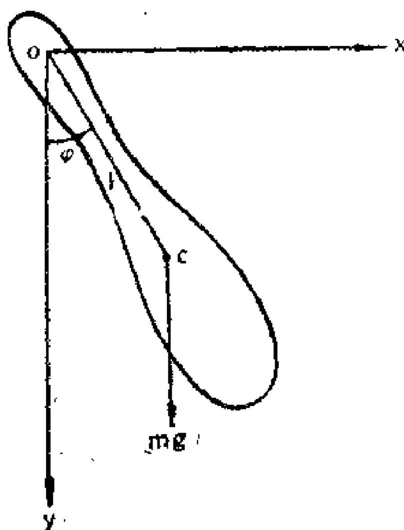


图5.5

由于复摆在重力场中的运动是属于稳定保守组的情况，所以

$$p_\varphi = \frac{\partial W}{\partial \varphi}$$

因此，复摆的哈密顿—雅可俾方程为

$$\frac{1}{2J}\left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^2 - mgl\cos\varphi = E \tag{2}$$

因为 $W=W(\varphi)$，所以（2）式又可表示为

$$\frac{1}{2J}\left(\frac{dW}{d\varphi}\right)^2 - mgl\cos\varphi = E \tag{3}$$

即

$$\frac{dW}{d\varphi} = \sqrt{2J(E+mgl\cos\varphi)}$$

积分上式得

$$W = \int \sqrt{2J(E+mgl\cos\varphi)}\, d\varphi \tag{4}$$

根据哈密顿正则方程的积分（5.54）式得复摆在重力场中运动的运动积分为

$$t - t_0 = \frac{\partial W}{\partial E} = \int \frac{\sqrt{2J}}{2} \cdot \frac{d\varphi}{\sqrt{E+mgl\cos\varphi}} \tag{5}$$

设开始时 $t=t_0$，$\varphi=0$，又当 φ_0 为最大的幅角时，$E=-mgl\cos\varphi_0$，于是（5）式又可表示为

$$t - t_0 = \frac{\sqrt{2J}}{2} \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{mgl(\cos\varphi - \cos\varphi_0)}} \tag{6}$$

由于

$$\cos\varphi = 1 - 2\sin^2\frac{\varphi}{2}$$

$$\cos\varphi_0 = 1 - 2\sin^2\frac{\varphi_0}{2}$$

故（6）式又可改写为

$$t - t_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{J}{mgl}} \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2\frac{\varphi_0}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}}} \tag{7}$$

若令

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \sin\frac{\varphi_0}{2} \cdot \sin\theta$$

而

$$\sin\frac{\varphi_0}{2} = k$$

那么

$$\sqrt{\sin^2\frac{\varphi_0}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}} = \sin\frac{\varphi_0}{2} \cdot \cos\theta = k\cos\theta$$

而

$$\frac{1}{2}\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi=\sin\frac{\varphi_0}{2}\cos\theta\, d\theta$$

于是，由（7）式可得复摆从$\varphi=0$到$\varphi=\varphi_0$时的时间为

$$t\varphi_0-t_0=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{J}{mgl}}\int_0^{\varphi_0}\frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2\frac{\varphi_0}{2}-\sin^2\frac{\varphi}{2}}}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{J}{mgl}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin\frac{\varphi_0}{2}\cos\theta\, d\theta}{k\cos\theta\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$$

$$=\sqrt{\frac{J}{mgl}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} \tag{8}$$

由于复摆从最低点$\varphi=0$摆动到最高点$\varphi=\varphi_0$时，摆动的时间恰好为复摆摆动周期τ的四分之一。所以复摆的周期τ为

$$\tau=4(t\varphi_0-t_0)=4\sqrt{\frac{J}{mgl}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} \tag{9}$$

当$k=\sin\frac{\varphi_0}{2}$不太大（$k<1$）时，（9）式中的被积函数可按二项式定理展开得

$$(1-k^2\sin^2\theta)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}k^2\sin^2\theta+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}k^4\sin^4\theta+\cdots+$$

$$+\frac{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\cdots\cdot(2n)}k^{2n}\sin^{2n}\theta+\cdots \tag{10}$$

把（10）式代入（9）式并逐项积分，再利用沃利斯积分公式

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}\theta\, d\theta=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2n)}\cdot\frac{\pi}{2}$$

便得

$$\tau=2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl}}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2k^2+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2k^4+\cdots+\left(\frac{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\cdots\cdot(2n)}\right)^2k^{2n}+\right.$$

$$\left.+\cdots\right]$$

从上述的几个例题中可看出，利用哈密顿—雅可俾方程求解一些简单的问题时，倒显得更加麻烦。可是，它同时可以给出运动物体的动量、运动轨道（即几何积分）以及运动规律（即运动积分）。这是它最大的优点。

习　　题

1.试证下例由质点组的角动量G的笛卡尔分量所组成的泊松括号的表示式：

（i）、$[G_y, G_z]=G_x$，　　（iii）、$[G_z, G_z]=0$

（ii）、$[G_z, G_x]=G_y$，　　（iv）、$[G_y, G_y]=0$

2.试证下列由质点组的动量p 和角动量G的笛卡尔分量所组成的泊松括号的表示式：

(i)、$[G_x, p_y]=p_z$，　(v)、$[G_z, p_y]=-p_x$

(ii)、$[G_y, p_z]=p_x$，　(vi)、$[G_y, p_y]=0$

(iii)、$[G_z, p_x]=p_y$，　(vii)、$[G_x, p_x]=0$

(iv)、$[G_x, p_z]=-p_y$，

3.若$[F, G]$为泊松括号，试证：

(i) $[F_1F_2, G]=F_1[F_2, G]+F_2[F_1, G]$

(ii) $[F_1+F_2, G]=[F_1, G]+[F_2, G]$

4.设f_1，f_2，…，f_m是p_i，q_i的函数，而F又是f_1，f_2，…，f_m的函数，试证泊松括号

$$[F, G]=\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial F}{\partial f_l}[f_l, G]$$

5.试证下列变换$(q, p)\longrightarrow(Q, P)$为正则变换：

(i) $Q=\sqrt{2q}\cos p$，$P=\sqrt{2q}\sin p$

(ii) $Q=\ln(1+\sqrt{q}\cos p)$，$P=2(1+\sqrt{q}\cos p)\sqrt{q}\sin p$

(iii) $Q=\sqrt{\frac{2q}{K}}\cos p$，$P=\sqrt{2qK}\sin p$

6.给定正则变换的母函数S^*为

$$S^*(q, Q)=Q\arcsin\frac{q}{\sqrt{2Q}}+\frac{1}{2}q\sqrt{2Q-q^2}$$

及哈密顿函数

$$H=\frac{1}{2}(p^2+q^2)$$

求正则变换及新的正则方程。

7.自由落体在t_0时，从z_0高度下落，到t时到达z高度，试由哈密顿—雅可俾方程求其运动规律。

8.试用哈密顿—雅可俾方程求解行星的运动。

9.试用哈密顿—雅可俾方程求解对称陀螺绕定点的运动。

10.试用哈密顿—雅可俾方程求质点在势场

$$V=\frac{a}{r^2}-\frac{Fz}{r^3}$$

中运动时的主函数S，式中a及F为常数。

（答：在球面坐标系中

$$S=-Et+\int\sqrt{2mE-\frac{\alpha_2}{r^2}}dr+\int\sqrt{\alpha_2+2mF\cos\theta-\frac{\alpha_3^2}{\sin^2\theta}-2ma}d\theta+\alpha_3\varphi$$

式中m是质点的质量，E为总能量，α_2，α_3为积分常数）。

主 要 参 考 书

[1] 卢起良：分析力学讲义
[2] 蒲赫哥尔茨：理论力学基本教程钱尚武、钱敏译（1953、商务印书馆出版）
[3] 蒲赫哥尔茨：理论力学习题集 北京航空学院理论力学教研室译（1953，商务印书馆出版）
[4] 周衍柏：理论力学教程（1979，人民教育出版社）
[5] 朱照宣、周起钊、殷金生：理论力学（1982，北京大学出版社）
[6] 黄昭度、纪辉玉：分析力学（1985，清华大学出版社）
[7] 汪家诉：分析力学（1983，高等教育出版社）
[8] 王光远：应用分析动力学（1981，人民教育出版社）
[9] 理论力学原理及习题 杨廉译（徐氏基金会出版）
[10] Grant R. Fowles: *Analytical Mechanics*(1977)
[11] Jerry B. Marion: *Classical Dynamics of Particles and Systems*(1970)